Esercizi sugli insiemi numerici

Es1- Determinare i punti dell'insieme $A=\left\{x\in R \middle| \left(\sqrt{1-x}\le 2\right)\wedge\left(\left|x+\frac{5}{4}\right|\le\frac{7}{4}\right)\right\}$.

Es2- Determinare i punti dell'insieme numerico $A=\left\{x\in R \middle| \left(\frac{x^2-1}{x+2}<0\right)\wedge\left(\frac{|x|+1}{x-1}\le\frac{1}{2}\right)\right\}$

Es3- In relazione all'insieme numerico $A=\left\{x\in R \middle| -\frac{1}{x}\le x\le\frac{1}{x}\right\}$ risolvere i quesiti seguenti.

1. Precisare se l'insieme è limitato.
2. Indicare i suoi estremi inferiore e superiore e precisare se sono rispettivamente minimo e massimo.
3. Indicare l'insieme derivato (insieme dei punti di accumulazione dell'insieme stesso).

Soluzione

Es1) L'insieme A è formato dai punti reali che verificano il sistema di disequazioni

$$\begin{cases}\sqrt{1-x}\le 2 & (*)\\ \left|x+\frac{5}{4}\right|\le\frac{7}{4} & (**)\end{cases}$$

Risolviamo separatamente le due disequazioni e successivamente prenderemo l'insieme intersezione dei due insiemi di soluzioni che determineremo.

Disequazione (*)

La disequazione è equivalente alla doppia disuguaglianza $0\le 1-x\le 4$, e perciò al sistema

$\begin{cases}1-x\ge 0\\ 1-x\le 4\end{cases}$, che si riconduce al seguente $\begin{cases}x\le 1\\ x\ge -3\end{cases}$. Pertanto, l'insieme delle soluzioni della (*) è $S_1=[-3;1]$.

Disequazione (**)

Osserviamo che $\left|x+\frac{5}{4}\right|\le\frac{7}{4}$ è equivalente alla doppia disuguaglianza $-\frac{7}{4}\le x+\frac{5}{4}\le\frac{7}{4}$, che si può trasformare nella seguente $-\frac{7}{4}-\frac{5}{4}\le x\le\frac{7}{4}-\frac{5}{4}$, dunque deve risultare $-3\le x\le\frac{1}{2}$. L'insieme delle soluzioni è dunque l'intervallo $S_2=\left[-3;\frac{1}{2}\right]$.

Insieme delle soluzioni del sistema

Come anticipato l'insieme delle soluzioni del sistema è $S_1 \cap S_2 = \left[-3; \frac{1}{2}\right]$ e pertanto risulta

$A = \left[-3; \frac{1}{2}\right]$.

Es2) Per determinare i punti di A occorre trovare l'insieme delle soluzioni del sistema seguente

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+2} < 0 & (*) \\ \dfrac{|x|+1}{x-1} \le \dfrac{1}{2} & (**) \end{cases}$$

Il sistema è composto da due disequazioni razionali fratte che vanno separatamente.

Disequazione (*)

Per studiare la disequazione si studia il segno del polinomio al numeratore e di quello al denominatore. Si ha:

$x^2 - 1 > 0$, è soddisfatta per i valori reali x tali che (x<-1)$\vee$(x>1); pertanto l'insieme delle soluzioni della disequazione è $S_1 =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

Disequazione (**)

Nella disequazione la variabile x compare in modulo. Per studiare la disequazione è necessario distinguere i due casi a) x<0, b) x≥0, risolvere le corrispondenti disequazioni e unire i rispettivi insiemi di soluzioni.

Caso a) x<0

La disequazione assume la seguente forma

$\frac{-x+1}{x-1} \le \frac{1}{2}$, che diventa $-1 \le \frac{1}{2}$, disuguaglianza vera. Dunque ogni x dell'intervallo $S_{2.1} =]-\infty; 0[$ è soluzione della (**).

Caso b) x≥0

La disequazione diventa

$\frac{x+1}{x-1} \le \frac{1}{2}$, da cui $\frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{2} \le 0$, che diventa $\frac{x+3}{2(x-1)} \le 0$, che è soddisfatta dai valori reali x tali che $-3 \le x < 1$. Tenuto conto che si sta operando per x≥0 si conclude che la disequazione ammette come insieme di soluzioni $S_{2.2} = [0; 1[$.

In conclusione la disequazione (**) ammette come insieme di soluzioni $S_2 = S_{2.1} \cup S_{2.2} = \left]-\infty;1\right[$.

Insieme delle soluzioni del sistema

L'insieme delle soluzioni del sistema in esame è

$$S_1 \cap S_2 = \left(\left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;+\infty\right[\right) \cap \left]-\infty;1\right[= \left]-\infty;-1\right[$$

Perciò l'insieme numerico A è l'intervallo $\left]-\infty;-1\right[$.

Es3) L'insieme A coincide con l'insieme delle soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{x} \le x & (*) \\ x \le \dfrac{1}{x} & (**) \end{cases}$$, che si trasforma nel seguente $$\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x} \ge 0 & (*) \\ \dfrac{x^2-1}{x} \le 0 & (**) \end{cases}$$

Si riconosce immediatamente che l'insieme delle soluzione della (*) è S_1=]0;+∞[. Lasciamo al lettore di verificare che l'insieme delle soluzioni della (**) è S_2=]-∞;-1]∪]0;1]. Pertanto l'insieme richiesto è

$$A = S_1 \cap S_2 = \left]0;1\right].$$

L'insieme è limitato. Infatti ammette sia minoranti (un qualsiasi numero minore o uguale a zero lo è) e maggioranti (lo sono i numeri maggiori o uguali ad uno).

1. Inf(A)=0, che non è minimo perché non appartiene all'insieme. Sup(A)=1, che è anche massimo.
2. L'insieme derivato di A è l'intervallo chiuso [0;1]. Dr(A)= [0;1].