Studio di un insieme numerico

Topologia in R

[(1)] Esercizio_1

In relazione all'insieme numerico $A=\left\{x_n \in R \middle| x_n=1-\frac{1}{n+1}, n\in N\right\}$ risolvere i seguenti quesiti.

1) Precisare se è limitato, giustificando la risposta.
2) Determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore, precisando se gli stessi sono rispettivamente anche minimo e massimo per l'insieme.
3) Dopo aver dato la definizione di punto di accumulazione, dimostrare che il punto $x_0=1$ è di accumulazione per A.
4) Dimostrare che il punto il punto x_9 è isolato per A.

Soluzione

1) Di seguito sono riportati i primi cinque elementi dell'insieme A.

$$x_0=0,\ x_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ x_2=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3},\ x_3=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4},\ x_4=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

Possiamo notare che i loro valori sono strettamente crescenti. Questa proprietà si dimostra in generale osservando che sussiste la disuguaglianza $x_n<x_{n+1}$, per ogni $n\in$N. Infatti, si ha

$1-\frac{1}{n+1}<1-\frac{1}{(n+1)+1} \to -\frac{1}{n+1}<-\frac{1}{n+2} \to \frac{1}{n+1}>\frac{1}{n+2}$ e quest'ultima disuguaglianza è vera perché con $n\in$N si ha $0<n+1<n+2$.

Dalle considerazioni svolte si deduce che l'insieme **A è limitato inferiormente** e che $x_0=0$ è il suo estremo inferiore, nonché il suo minimo.

Osserviamo ora che $x_n=1-\frac{1}{n+1}<1$ e quindi k=1 è maggiorante per l'insieme e quindi questo **è limitato superiormente**. Poiché è limitato sia superiormente, che inferiormente, per definizione è un insieme limitato.

2) Nel precedente punto abbiamo precisato che In*f*(A)=0=min(A). Dimostriamo ora che k=1=Sup(A) ma che non può essere il massimo perché non appartiene ad A.
Ricordiamo le proprietà caratteristiche dell'**estremo superiore** di un insieme numerico A.
Diciamo che e″=Sup(A) se e solo se soddisfa le due seguenti proprietà:
i) $\forall x\in A, x\le e''$
ii) $\forall y\in R \wedge y<e'' \Rightarrow \exists x\in A: y<x\le e''$

La proprietà i) è soddisfatta perché abbiamo precisato che $x_n=1-\frac{1}{n+1}<1, \forall n\in$N.

Per provare la proprietà ii), posto $y=e''-\varepsilon=1-\varepsilon$, con ε opportuno numero positivo, occorre provare che esiste almeno un punto $x_n\in A$ che verifica la disuguaglianza $x_n>1-\varepsilon$.
Ebbene, la disuguaglianza da provare è

$1-\frac{1}{n+1}>1-\varepsilon$, che diventa $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$, che è soddisfatta per $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$. Pertanto, esistono infiniti punti dell'insieme A che verificano la disuguaglianza richiesta e sono tutti quelli che si ottengono assegnando ad *n* valori maggiori di $\frac{1}{\varepsilon}-1$.

[(1)] Esercizio assegnato nel compito in classe 5I-11-11-2010 del Liceo Scientifico "G. Stampacchia" - Tricase

Conclusione- Poiché $e"=1$ soddisfa le due proprietà caratteristiche dell'estremo superiore, concludiamo che esso è effettivamente l'estremo superiore di A.

3) Ricordiamo la definizione di punto di accumulazione per un insieme numerico A.

Definizione- Il punto $x_0 \in \overline{R}$ è di accumulazione per A se comunque si prende un intorno di x_0 in esso esiste ameno un punto *x* di A che sia diverso da x_0. In simboli:

$$\begin{pmatrix} x_0 \in \overline{R} \\ di \quad acc. \quad per \quad A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall I(x_0), \exists x \neq x_0 : \\ x \in I(x_0) \cap A \end{pmatrix}$$

Ebbene, se come intorno di $x_0 = 1$ prendiamo $I(1) =]1-\varepsilon; 1+\varepsilon[$, con $\varepsilon > 0$, la dimostrazione sviluppata nel precedente punto prova che con $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ si ottengono punti $x_n \in A$ che sono diversi da $x_0 = 1$ e che sono maggiori di $1-\varepsilon$. Dunque è vero che il punto in questione è di accumulazione per A.

4) Ricordiamo che un $x_0 \in A$ è isolato per l'insieme A se esiste ameno un intorno completo $I(x_0)$ del punto la cui intersezione con A si riduce al punto stesso. In simboli $I(x_0) \cap A = \{x_0\}$.

Osserviamo intanto che $x_9 = \frac{9}{10}$. Nel precedente punto 1) abbiamo provato che $x_n < x_{n+1}$, dunque risulta $x_8 < x_9 < x_{10}$. Posto:

$\delta_1 = x_9 - x_8 = \frac{9}{10} - \frac{8}{9} = \frac{1}{90}$; $\quad \delta_2 = x_{10} - x_9 = \frac{10}{11} - \frac{9}{10} = \frac{1}{110}$, poiché $0 < \delta_2 < \delta_1$,

per dimostrare che x_9 è isolato per A è sufficiente scegliere come intorno del punto l'intorno circolare $I(x_9) =]x_9 - \delta; x_9 + \delta[$, con $0 < \delta \le \delta_2$. Evidentemente risulterà

$]x_9 - \delta; x_9 + \delta[\cap A = \{x_0\}$.