Funzione goniometrica invertibile[1]

In relazione alla funzione goniometrica $f(x)=2sen\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}$, risolvere i seguenti quesiti.

a. Individuare il periodo ed un intervallo di ampiezza massima in cui la funzione è strettamente monotòna.
b. Relativamente all'intervallo I individuato nel precedente quesito, determinare il codominio della funzione, precisandone il minimo ed il massimo. Sia B il codominio della funzione.
c. Considerata la restrizione della funzione in esame all'intervallo I, cioè $f:I\to B$, determinare l'espressione della funzione inversa $x=f^{-1}(y)$.
d. Rappresentare nello stesso riferimento cartesiano xOy le due funzioni
$y=f(x),\ \forall x\in I$;
$y=f^{-1}(x),\ \forall x\in B$.

Soluzione

a. La funzione in esame ha sostanzialmente le stesse caratteristiche della funzione elementare $g(x)$=sen$x$. Infatti ha periodo $T=2\pi$ e siccome la funzione $\alpha(x)=x-\frac{\pi}{3}$ è strettamente crescente, in virtù del teorema sulla composizione di due funzioni monotòne, possiamo affermare che la monotonìa della funzione $sen(\alpha(x))$ è determinata esclusivamente dalla monotonìa funzione elementare $g(x)$=sen$x$.
La funzione **sen$x$ è strettamente crescente** in ciascuno degli intervalli del tipo $I_k=\left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$, con $k\in Z$, mentre è strettamente decrescente in ciascuno degli intervalli $J_k=\left]\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right[$, con $k\in Z$.
Precisiamo che ciascuno degli intervalli I_k, J_k ha ampiezza π e non ci sono intervalli di ampiezza maggiore in cui la funzione sia strettamente crescente o strettamente decrescente. Ebbene, scegliamo uno di questi intervalli, precisamente l'intervallo $I_0=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ e determiniamo i valori che deve assumere la variabile x affinché il codominio della funzione $\alpha(x)=x-\frac{\pi}{3}$ sia I_0.
Osserviamo che:
$x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}$ per $x=-\frac{\pi}{6}$; $\quad x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ per $x=\frac{5\pi}{6}$.

b. Consideriamo la restrizione della funzione all'intervallo $I=\left[-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$.
Per quanto precede, la funzione nell'intervallo indicato è strettamente crescente, assumendo il valore minimo nel primo estremo ed il valore massimo nel secondo estremo:

[1] Esercizio assegnato nel compito in classe:M2_5D-17-11-11

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2sen\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}= \ 2sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2} \text{ (valore minimo)}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=2sen\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}= \ 2sen\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \qquad \text{(valore massimo).}$$

Il codominio della funzione è l'intervallo $B=\left[-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right]$.

c. La restrizione della funzione in esame è

$$f:\left[-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]\to\left[-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right]$$

Essa, essendo strettamente crescente, risulta iniettiva, ed è anche suriettiva (perché l'insieme delle immagini coincide con l'insieme di arrivo). La funzione è dunque invertibile. Determiniamo la funzione inversa.
Posto

$$y=f(x)=2sen\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\to\ sen\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2y+1}{4}\to\ x=\frac{\pi}{3}+arcsen\left(\frac{2y+1}{4}\right)$$

La funzione inversa richiesta è

$$f^{-1}:\left[-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right]\to\left[-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right] \text{ tale che } y\to f^{-1}(y)=\frac{\pi}{3}+arcsen\left(\frac{2y+1}{4}\right).$$

d. Le due funzioni da rappresentare nello stesso riferimento cartesiano sono

$$f:\left[-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]\to\left[-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right], \text{ con } \ y=f(x)=2sen\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2};$$

$$f^{-1}:\left[-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right]\to\left[-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right], \text{ con}$$

$$y=f^{-1}(x)=\frac{\pi}{3}+arcsen\left(\frac{2x+1}{4}\right).$$

I diagrammi sono riportati in **Figura 1**.

Proprietà geometrica delle curve

Nella figura abbiamo rappresentato anche la bisettrice del primo e terzo quadrante, la cui equazione è y=x, in modo da permettere al lettore di osservare che i diagrammi delle due funzioni rappresentate sono l'uno il simmetrico dell'altro rispetto alla suddetta retta. Questa è una proprietà di cui godono i diagrammi delle due funzioni $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$, essendo $x=f^{-1}(y)$ la funzione inversa della prima, indipendentemente da quale sia la funzione $y=f(x)$ considerata. Ovviamente, per ottenere il diagramma della funzione $y=f^{-1}(x)$ è necessario che la funzione $y=f(x)$, nel dominio considerato, sia invertibile.

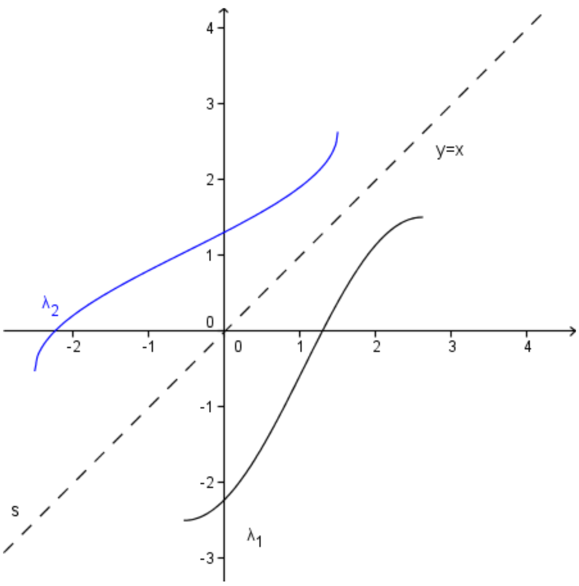

Figura 1

Comandi in GeoGebra per ottenere i grafici corrispondenti.
Per la funzione $y=f(x)$: curva[t,2sin(t-Pi/3)-1/2,t,-Pi/6,5Pi/6]

Per la funzione $y = f^{-1}(x)$: curva[t,Pi/3+asin((2t+1)/4),t,-5/2,3/2]

Un'immagine più estesa per capire meglio

Di seguito, in **Figura 2**, oltre ai due diagrammi riportati in Figura 1, abbiamo riportato il diagramma della funzione $y = f(x)$, con stile tratteggio, in un intervallo più esteso. Ciò serve per ricordare che la funzione è periodica e che solo sue particolari restrizioni sono invertibili.

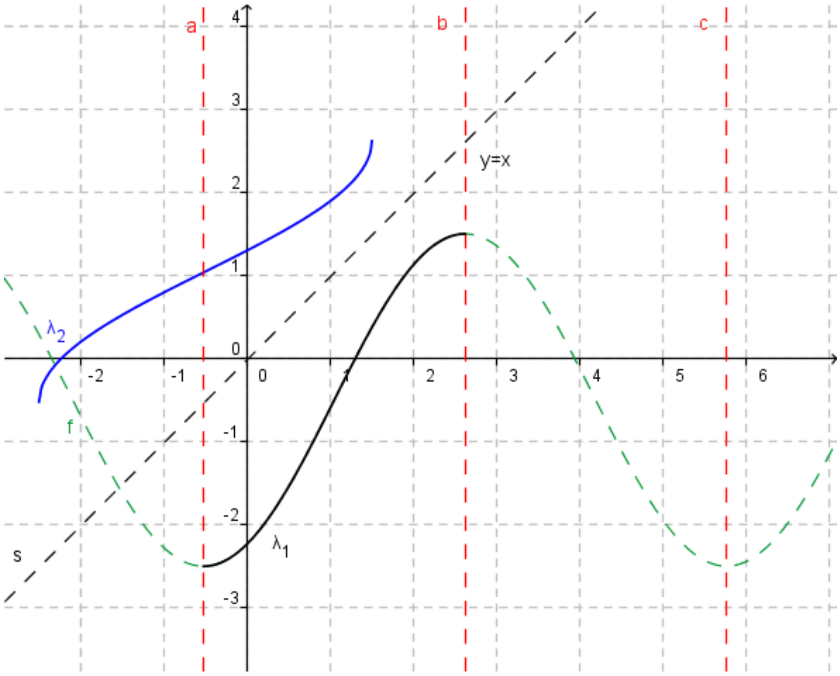

Figura 2