

Funzioni razionali composte e funzioni invertibili⁽¹⁾

In relazione alle funzioni

$$f(x) = \frac{1}{x} - 2, \text{ con } \frac{1}{2} \leq x \leq 2;$$

$$g(x) = -\frac{1}{x} + 1, \text{ con } 2 \leq x \leq 4;$$

risolvere i quesiti che seguono.

Q₁- Precisare la monotonia di ciascuna funzione e determinare il rispettivo codominio.

Rappresentare i diagrammi delle due funzioni.

Q₂- Precisare se hanno senso le funzioni $g \circ f$, $f \circ g$ e determinare in caso affermativo le relative espressioni algebriche.

Q₃- Riconosciuto nel precedente quesito Q₂ che solo una delle due funzioni indicate ha senso e che è strettamente monotona, la si indichi con $y = \varphi(x)$ e determinarne il relativo codominio e l'espressione della funzione inversa. Rappresentare nello stesso riferimento cartesiano le due funzioni $y = \varphi(x)$ ed $y = \varphi^{-1}(x)$.

Soluzione

Q₁- Dimostriamo che la funzione f considerata è strettamente decrescente.

Osserviamo che presi $x_1 \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$, $x_2 \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$, con $x_1 < x_2$ possiamo scrivere

$$x_1 < x_2 \rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \rightarrow \frac{1}{x_1} - 2 > \frac{1}{x_2} - 2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2);$$

dunque la funzione è strettamente decrescente. Deduciamo che $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $f(2) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$,

rappresentano rispettivamente il **massimo** ed il **minimo della funzione**. Il codominio della

funzione è l'intervallo $\text{codom}(f) = \left[-\frac{3}{2}; 0\right]$.

Per la funzione g , possiamo riconoscere che è strettamente crescente. Infatti, presi comunque

$x_1 \in [2; 4]$, $x_2 \in [2; 4]$, con $x_1 < x_2$ si ha:

$$x_1 < x_2 \rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \rightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \rightarrow -\frac{1}{x_1} + 1 < -\frac{1}{x_2} + 1 \rightarrow g(x_1) < g(x_2),$$

cos' come richiede la definizione di stretta crescenza.

Deduciamo che la funzione ammette il valore minimo nel primo estremo dell'intervallo di definizione ed il valore massimo nel secondo estremo. Risulta:

$$\min = g(2) = \frac{1}{2}; \max = g(4) = \frac{3}{4}.$$

I diagrammi delle due funzioni sono riportati in **Figura 1**

Il codominio della funzione è l'intervallo

$$\text{codom}(g) = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right].$$

Per ottenere i diagrammi delle due funzioni con

GeoGebra sono stati implementati i seguenti comandi:

per $f(x)$: `curva[t, 1/t-2,t,1/2,2];`

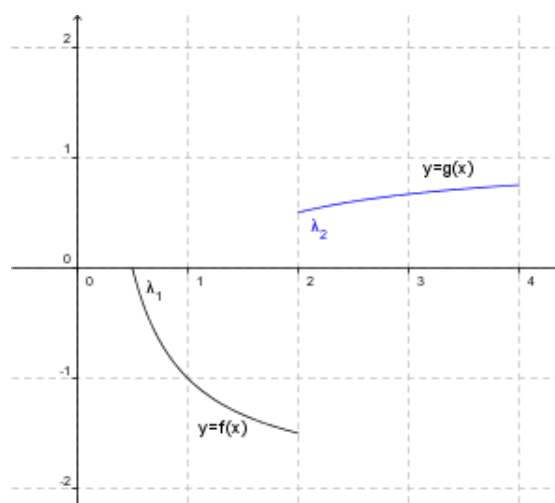


Figura 1

⁽¹⁾ Esercizio assegnato nel compito in classe: M2_5D-17-11-11

per $g(x)$: curva $[t, -1/t+1, t, 2, 4]$

Q2- Ha senso la funzione $g \circ f$?

Osserviamo che la funzione in questione ha senso se il codominio della prima funzione, $y=f(x)$, ha intersezione non vuota con il dominio della seconda, $y=g(x)$. Poiché

$$\text{codom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \left[-\frac{3}{2}; 0\right] \cap [2; 4] = \emptyset,$$

si conclude che non esiste la funzione $g \circ f$.

Ha senso la funzione $f \circ g$?

La funzione ha senso perché per quanto visto nel precedente quesito Q1, il codominio di g ha intersezione non vuota con il dominio di f :

$$\text{codom}(g) \cap \text{Dom}(f) = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right] \cap \left[\frac{1}{2}; 2\right] = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right].$$

Determiniamo pertanto l'espressione algebrica della funzione in oggetto.

$$x \in [2; 4] \xrightarrow{g} 1 - \frac{1}{x} = y \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right] \xrightarrow{f} \frac{1}{y} - 2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} - 2 = \frac{2-x}{x-1} = f(g(x))$$

Q3- La funzione $f \circ g$ è quella che nel testo si suggerisce di indicare con φ ; dunque

$$y = \varphi(x) = \frac{2-x}{x-1} \text{ con } x \text{ variabile in tutto il dominio della funzione } g, \text{ quindi } [2; 4].$$

Monotonia della funzione $y = \varphi(x)$

Osserviamo che la funzione in questione è stata ottenuta componendo in successione la funzione g strettamente crescente, con la funzione f , strettamente decrescente; si deduce che la funzione ottenuta è strettamente decrescente e quindi assume il suo massimo nel primo estremo nell'intervallo del dominio ed il minimo nel secondo estremo del dominio.

$$\max(\varphi) = \varphi(2) = 0; \quad \min(\varphi) = \varphi(4) = -\frac{2}{3}.$$

Sussiste dunque la definizione seguente

$$\varphi: [2; 4] \rightarrow \left[-\frac{2}{3}; 0\right], \text{ con } y = \varphi(x) = \frac{2-x}{x-1}.$$

Determinazione della funzione inversa

$$x = \varphi^{-1}(y).$$

Risolvi l'equazione

$$y = \frac{2-x}{x-1} \text{ nell'incognita } x.$$

$$y = \frac{2-x}{x-1} \rightarrow y(x-1) = 2-x \rightarrow$$

$$xy + x = 2 + y \rightarrow x = \frac{2+y}{y+1} = \varphi^{-1}(y)$$

Pertanto risulta

$$\varphi^{-1}: \left[-\frac{2}{3}; 0\right] \rightarrow [2; 4], \text{ con } \varphi^{-1}(y) = \frac{2+y}{y+1}$$

Rappresentazione delle funzioni

$$y = \varphi(x) = \frac{2-x}{x-1}, \text{ con } x \in [2; 4];$$

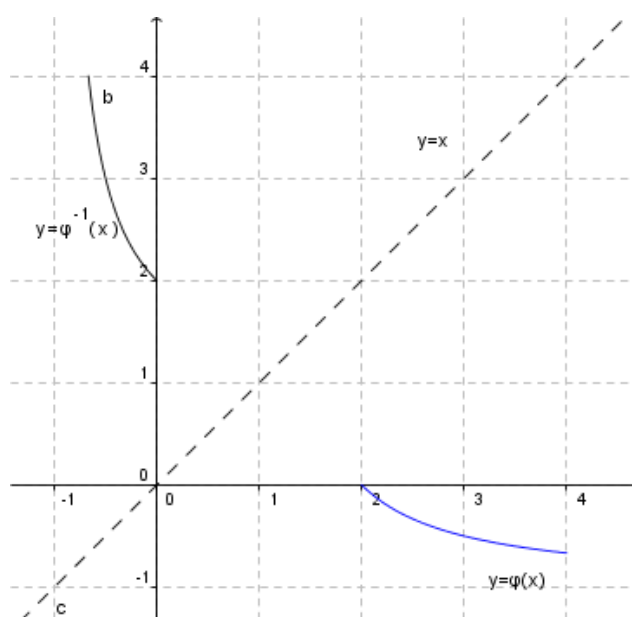


Figura 2

$$y = \varphi^{-1}(x) = \frac{2+x}{x+1}, \text{ con } x \in \left[-\frac{2}{3}; 0\right].$$

Si noti che i diagrammi delle due funzioni sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante (**Figura 2**).

Comandi in GeoGebra

per la funzione $y = \varphi(x)$ si scrive: `curva[t,(2-t)/(t-1),t,2,4];`

per la funzione $y = \varphi^{-1}(x)$ si scrive: `curva[t,(2+t)/(t+1),t,-2/3,0]`