

Domini di funzioni

Di ciascuna funzione indicare il tipo e determinare l'insieme di definizione (dominio)

Esercizi con indice di difficoltà medio

$$1) f(x) = \frac{\sqrt{-x} - 1}{2x^2 + x}$$

$$2) f(x) = \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{2x^2 - x}$$

$$3) f(x) = \frac{\sqrt{1-\sqrt{x+1}}}{x}$$

$$4) f(x) = \sqrt{x - \sqrt{\frac{1-x}{2}}}$$

$$5) f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - |x|}}{x^2 - 4},$$

$$6) f(x) = \frac{1}{\log(|x| - 1)}$$

$$7) f(x) = \frac{\sqrt{-x}}{\log(1-x)}$$

$$8) f(x) = \frac{\sqrt{-x}}{\log_x(1-x)}$$

$$9) f(x) = \log_{\sqrt{x}}(3x-2)$$

$$10) f(x) = \log(\log^2 x - 2 \log x),$$

$$11) f(x) = \log_x \sin x,$$

$$A = \{0\} \cup]-\infty; -2[\cup]-2; -1] \cup [1; 2[\cup]2; +\infty[$$

$$A =]0; 1[\cup]e^2; +\infty[$$

$$A = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}}]2k\pi; (2k+1)\pi[\right) - \{1\}$$

Soluzione

$$1) \quad f(x) = \frac{\sqrt{-x-1}}{2x^2+x}$$

La funzione è algebrica irrazionale fratta, con un radicale avente indice pari; le condizioni per la sua esistenza sono che il radicando della radice quadrata sia non negativo e che il denominatore sia diverso da zero:

$$(-x \geq 0) \wedge (2x^2 + x \neq 0), \text{ che sviluppate diventano } (x \leq 0) \wedge \left(\left(x \neq -\frac{1}{2} \right) \wedge (x \neq 0) \right).$$

$$\text{Concludiamo che l'insieme di definizione della funzione è } A = \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[\cup \left] -\frac{1}{2}; 0 \right[.$$

$$2) \quad f(x) = \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{2x^2-x}$$

La funzione è algebrica irrazionale fratta, con un radicale doppio (radicale quadratico contenente nel proprio argomento un altro radicale quadratico); le condizioni per l'esistenza della funzione sono:

$$(1-\sqrt{x} \geq 0) \wedge (2x^2 - x \neq 0), \text{ che sviluppate forniscono le limitazioni}$$

$$(0 \leq x \leq 1) \wedge \left(x \neq 0 \wedge x \neq \frac{1}{2} \right).$$

$$\text{L'insieme di definizione della funzione è } A = \left] 0; \frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}; 1 \right]$$

$$3) \quad f(x) = \frac{\sqrt{1-\sqrt{x+1}}}{x}$$

La funzione è algebrica irrazionale fratta, con un radicale doppio (radicale quadratico contenente nel proprio argomento un altro radicale quadratico); le condizioni per l'esistenza della funzione sono:

$$(1-\sqrt{x+1} \geq 0) \wedge (x \neq 0), \text{ che diventano } (0 \leq x+1 \leq 1) \wedge (x \neq 0), \text{ dalle quali si conclude che}$$

$$\text{l'insieme di definizione della funzione è } A = [-1; 0[.$$

$$4) \quad f(x) = \sqrt{x - \sqrt{\frac{1-x}{2}}}$$

La funzione è algebrica irrazionale intera. La condizione da imporre alla variabile x per l'esistenza della funzione è

$$x - \sqrt{\frac{1-x}{2}} \geq 0, \text{ che si può scrivere nella forma equivalente } \sqrt{\frac{1-x}{2}} \leq x.$$

La disequazione ottenuta è equivalente al seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \frac{1-x}{2} \geq 0 \\ x \geq 0 \\ \frac{1-x}{2} \leq x^2 \end{cases}, \text{ che semplificato diventa } \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 0 \\ 2x^2 + x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Risolvendo la disequazione di secondo grado si trova che è soddisfatta per i valori della variabile tali che $(x \leq -1) \vee (x \geq \frac{1}{2})$. Dal confronto di tutte le disuguaglianze del sistema si conclude che l'insieme delle soluzioni dello stesso è $A = [\frac{1}{2}; 1]$, che è dunque l'insieme di definizione della funzione.

5) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - |x|}}{x^2 - 4}$

La funzione è algebrica irrazionale fratta, con un radicale avente indice pari ; le condizioni per la sua esistenza sono

$$(x^2 - |x| \geq 0) \wedge (x^2 - 4 \neq 0)$$

Osserviamo che $x^2 = |x|^2$ e quindi le condizioni precedenti si possono anche scrivere nella forma seguente

$$(|x|(|x| - 1) \geq 0) \wedge (x^2 - 4 \neq 0).$$

Sviluppando le due disequazioni otteniamo:

- a) $|x|(|x| - 1) \geq 0$, è soddisfatta dai valori di x tali che $(x \leq -1) \vee (x \geq 1) \vee (x = 0)$;
- b) La condizione $x^2 - 4 \neq 0$ è soddisfatta dai valori di x tali che $(x \neq -2) \wedge (x \neq 2)$.

Sintetizzando le limitazioni ottenute per x si conclude che l'insieme di definizione della funzione è

$$A = \{0\} \cup]-\infty; -2[\cup]-2; -1[\cup [1; 2[\cup]2; +\infty[$$

6) $f(x) = \frac{1}{\log(|x| - 1)}$

La funzione è trascendente logaritmica fratta; per la sua esistenza è necessario che l'argomento del logaritmo sia positivo e che il denominatore sia diverso da zero. Dunque, x deve verificare la condizione

$$(|x| - 1 > 0) \wedge (\log(|x| - 1) \neq 0), \text{ che diventa}$$

$$((x < -1) \vee (x > 1)) \wedge (|x| - 1 \neq 1), \text{ da cui}$$

$$((x < -1) \vee (x > 1)) \wedge ((x \neq -2) \wedge (x \neq 2)).$$

Concludiamo che l'insieme di definizione della funzione è

$$A =]-\infty; -2[\cup]-2; -1[\cup]1; 2[\cup]2; +\infty[$$

$$7) \quad f(x) = \frac{\sqrt{-x}}{\log(1-x)}$$

Si tratta di una funzione trascendente nella cui espressione sono presenti un radicale di indice pari ed una funzione logaritmica al denominatore. Le condizioni da imporre alla variabile x per l'esistenza della funzione sono

$$(-x \geq 0) \wedge (1-x > 0) \wedge (\log(1-x) \neq 0)$$

Elaborando le condizioni si ha $(x \leq 0) \wedge (1-x \neq 1)$, che diventano $(x \leq 0) \wedge (x \neq 0)$. Si conclude che l'insieme di definizione della funzione è l'intervallo $A =]-\infty; 0[$.

$$8) \quad f(x) = \frac{\sqrt{-x}}{\log_x(1-x)}$$

La funzione è trascendente logaritmica con la presenza di un radicale. Le condizioni da imporre per l'esistenza sono:

- a) $-x \geq 0$, per l'esistenza del radicale quadratico;
- b) $1-x > 0$, perché l'argomento della funzione logaritmica deve essere positivo;
- c) $(x > 0) \wedge (x \neq 1)$, perché la base della funzione logaritmo deve essere positiva e diversa da uno;
- d) $1-x \neq 1$, perché il logaritmo di uno (1), in una qualsiasi base è zero, mentre il denominatore di una frazione non può essere nullo.

Osserviamo che le condizioni a) e c) sono incompatibili e quindi la funzione in esame non è definita per alcun valore reale. Il suo insieme di definizione è perciò l'insieme vuoto $\emptyset$.

$$9) \quad f(x) = \log_{\sqrt{x}}(3x-2)$$

Le condizioni da imporre per l'esistenza della funzione sono:

- a) $3x-2 > 0$, perché argomento della funzione logaritmo;
- b) $(\sqrt{x} > 0) \wedge (\sqrt{x} \neq 1)$, perché la base della funzione logaritmo deve essere positiva e diversa da uno.

Risolvendo le due condizioni a) e b) e intersecando i rispettivi insiemi di soluzioni si ricava come dominio della funzione l'insieme $A = \left] \frac{2}{3}; 1 \right[\cup] 1; +\infty [$.

10) $f(x) = \log(\log^2 x - 2 \log x)$

Nella struttura della funzione è presente la funzione logaritmo annidata; per la sua esistenza la variabile x deve verificare la condizione

$$\log^2 x - 2 \log x > 0 \text{ e questa è soddisfatta dai valori } x \text{ tali che } (\log x < 0) \vee (\log x > 2).$$

L'insieme dei valori x che verificano la condizione indicata sono quelli dell'insieme

$$A =]0; 1[\cup]e^2; +\infty[, \text{ che risulta essere pertanto l'insieme di definizione della funzione in oggetto.}$$

11) $f(x) = \log_x(\sin x)$

La funzione esiste per i valori della variabile x che soddisfano le seguenti condizioni:

- a) $\sin x > 0$, come argomento di una funzione logaritmica;
- b) $(x > 0) \wedge (x \neq 1)$, perché x è base del logaritmo.

Tenendo conto della periodicità della funzione $\sin x$, e che limitatamente al primo giro detta funzione è positiva nell'intervallo $]0; \pi[$, si conclude che l'insieme di definizione della funzione in oggetto è

$$A = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}}]2k\pi; (2k+1)\pi[\right) - \{1\}.$$