Funzione trascendente goniometrica

Dominio di una funzione, segno e zeri della funzione, limiti nei punti di frontiera e grafico probabile

Testo

In relazione alla seguente funzione $f(x)=\sqrt[4]{\frac{sen(x)+\cos(x)-1}{\cos(x)}}$ risolvere i quesiti che seguono.

1. Si classifichi la funzione, precisando in particolare se è periodica, indicandone il periodo in caso affermativo. Determinare il dominio di definizione.
2. Si precisi il segno e si determinino gli eventuali zeri limitatamente all'intervallo [0;2π].
3. Limitatamente all'intervallo [0;2π] si individuino i punti di frontiera del dominio e si studino i limiti della funzione in corrispondenza a detti punti; precisare se vi sono punti di eventuali discontinuità ed in caso affermativo stabilirne il tipo.
4. Utilizzando un software conosciuto, limitatamente al sottoinsieme A di [0;2π] in cui la funzione è definita, tracciare approssimativamente il diagramma della funzione *f*:A→R e precisare se la stessa è iniettiva e quali siano l'estremo inferiore e l'estremo superiore.

Elaborazioni

1. La funzione $f(x)=\sqrt[4]{\frac{sen(x)+\cos(x)-1}{\cos(x)}}$ è trascendente goniometrica e poiché è definita tramite una radice di indice pari per la sua esistenza il radicando dovrà essere non negativo. Il dominio di definizione si determina risolvendo la disequazione

   $$\frac{sen(x)+\cos(x)-1}{\cos(x)}\geq 0 \qquad (1.1)$$

   a. … si riconosce immediatamente che **la funzione in oggetto è periodica ed ha periodo 2π**.
   ….

   b. Per risolvere la disequazione (1.1) e trovare il dominio di definizione D della funzione è necessario determinare separatamente il segno del numeratore e quello del denominatore della frazione affrontando le disequazioni $N(x)=sen(x)+\cos(x)-1\geq 0$ e $D(x)=\cos(x)>0$. Avendo precisato che la funzione è periodica **limitiamo lo studio delle due disequazioni indicate all'intervallo [0;2π]**; l'estensione a tutto il dominio di definizione della funzione sarà immediata.

   c. Studio della disequazione $sen(x)+\cos(x)-1\geq 0$
   …
   Poiché sussistono le uguaglianze $sen(x)=2sen\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$, $\cos(x)=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$, $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+sen^2\left(\frac{x}{2}\right)=1$, la precedente disuguaglianza diventa…
   ….
   Limitatamente all'intervallo [0;2π] notiamo che:

la disequazione $sen\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$ è soddisfatta per i valori di x tali che $0 \leq \frac{x}{2} \leq \pi$, quindi con $0 \leq x \leq 2\pi$;…

La disuguaglianza $\cos\left(\frac{x}{2}\right) - sen\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$, che possiamo scrivere come $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \geq sen\left(\frac{x}{2}\right)$, dal confronto dei diagrammi delle due funzioni goniometriche $f_1(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$, $f_2(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, riportati in Figura 1, si deduce che …. Per i valori $\pi/2 < x \leq 2\pi$ risulta $\cos\left(\frac{x}{2}\right) < sen\left(\frac{x}{2}\right)$, perciò $\cos\left(\frac{x}{2}\right) - sen\left(\frac{x}{2}\right) < 0$. Per quanto detto …; il prodotto si annulla per x=0, $x = \pi/2$ e $x = 2\pi$.

d. Studio del segno del denominatore della frazione. …
e. Confrontando i segni del numeratore e del denominatore della frazione (1.1) si deduce che la frazione è positiva per ($0 < x < \pi/2$) o ($\pi/2 < x < \pi/2$),……
f. Conclusione - La funzione in esame, limitatamente all'intervallo $[0;2\pi]$, è definita per ($0 \leq x < \pi/2$) vel ($\pi/2 < x < 3\pi/2$) vel ($x = 2\pi$).
g. Il dominio della funzione in oggetto è l'insieme …

2. Segno e zeri della funzione - Per quanto esposto nello sviluppo del precedente punto (1.), poiché la radice n-esima di un numero positivo è ancora un numero positivo ….
3. La frontiera del dominio, limitatamente all'intervallo $[0;2\pi]$ è Fr=$\{0;\pi/2; 3\pi/2;2\pi\}$.Per la periodicità già precisata, nel punto $x = 2\pi$ il comportamento della funzione è identico a quello nel punto x =0, pertanto ci soffermeremo solo sui primi tre punti della frontiera.

Figura 1- Confronto grafico delle funzioni cos(x/2) e sen(x /2).

3.1) Punto x =0 $\rightarrow$ Il punto appartiene al dominio e in esso la funzione si annulla; **il punto è di accumulazione solo a destra**. …

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[4]{\frac{sen(x)+\cos(x)-1}{\cos(x)}} = \ldots \qquad \text{C.V.D.}$$

3.2) Il punto $x = \pi/2$ è di accumulazione a destra e a sinistra. Studiamo il limite

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sqrt[4]{\frac{sen(x)+\cos(x)-1}{\cos(x)}} =$ …..si presenta la forma indeterminata 0/0. Procediamo con lo studio di tale forma riportando nelle elaborazioni sono il radicando. Successivamente perverremo alla conclusione per l'intera funzione in virtù del **teorema sul limite di una funzione composta**.

…Per il teorema sul limite di una funzione composta possiamo scrivere anche

…, pertanto, il limite nel punto esiste ed è finito. La funzione presenta in $x = \pi/2$ una **discontinuità di terza specie** (**discontinuità eliminabile**).

3.3) Il punto $x = 3\pi/2$ è di accumulazione solo a sinistra. Studiamo il limite del radicando.

…

Per $x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-$ la funzione ammette limite $+\infty$ e quindi detto punto è di discontinuità di seconda specie; la retta di equazione $x = 3\pi/2$ ….

4. L'insieme A indicato nel testo è $A=\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$. Formalizziamo la funzione in oggetto come segue

$f:x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[\rightarrow\Re$, tale che $f(x)=\sqrt[4]{\frac{sen(x)+\cos(x)-1}{\cos(x)}}$.

Con GeoGebra rappresentiamo il diagramma della funzione dopo aver inserito nella riga di comando la stringa $((\sin(x)+cos(x)-1)/\cos(x))\wedge(1/4)$.

1) Osservando attentamente il diagramma della funzione si può affermare che è iniettiva. Infatti, ….
2) Se si considera come insieme di arrivo il codominio della funzione che è $\text{Codom}(f)=[0;1[\cup]1;+\infty[$, la funzione è anche biunivoca.
3) L'estremo superiore è Sup(*f*)=+∞ ed il minimo è *f* (0)=0.

Figura 2- Il punto P(π/2;1) non fa parte del grafico.