Esercitazione sulle funzioni

dominio, codominio, segno e zeri

1. In relazione alla funzione reale di variabile reale $f(x) = x^2 + 4x + 4$

a. definirne dominio, segno e zeri;
b. risolvere l'equazione f(x)=9;
c. rappresentare nel piano cartesiano il diagramma della funzione.

Risoluzione

a. La funzione è definita su tutto l'asse reale . Osserviamo che risulta $f(x) = (x+2)^2$, pertanto è soddisfatta la disuguaglianza $f(x) > 0$ $\forall x \neq -2$ ed f(x)=0 solo per x=-2.
b. L'equazione indicata assume la forma $(x+2)^2 = 9$, da cui $x = -2 \pm 3$; l'equazione ammette due radici che sono $x_1=-5$, $x_2=1$.
c. Il diagramma della funzione è una parabola avente vertice nel punto V(-2;0), asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, concavità rivolta verso l'alto. La rappresentazione grafica è riportata in Figura 1.

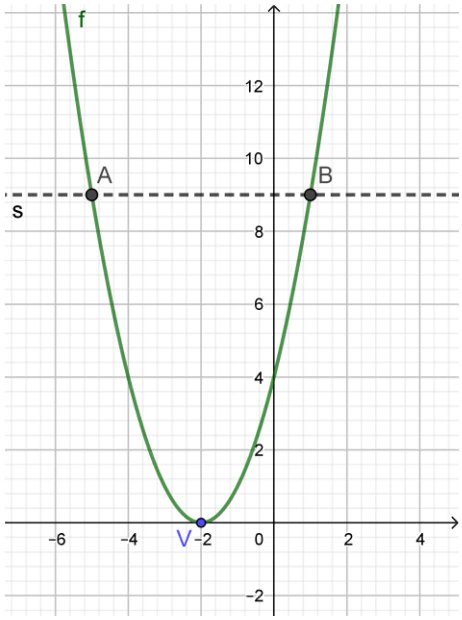

Figura 1

*** ***

2. Si consideri la seguente funzione definita per casi

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & per \quad x \le 1 \\ x^2 - x & per \quad x > 1 \end{cases}$$

a. Determinare i punti in cui è soddisfatta ciascuna delle seguenti relazioni: f(x)>0, f(x)<0, f(x)=0.
b. Rappresentare il diagramma e precisarne il codominio.
c. Risolvere l'equazione f(x)=2 e indicare cosa rappresenta l'insieme delle sue radici relativamente al punto reale 2.

Risoluzione

a. Relativamente all'intervallo x<1 risulta f(x)>0; inoltre, per l'intervallo x>1 la disuguaglianza f(x)>0 è soddisfatta in tutto l'intervallo in esame; infine risulta f(x)=0 solo nel punto x=1.
b. Il diagramma della funzione, relativamente all'intervallo]-∞;1], è la semiparabola di equazione $y = \sqrt{1-x}$, cioè $x = 1 - y^2$, avente vertice nel punto V(1;0), asse di simmetria coincidente con

l'asse delle ascisse, giacente nel semipiano delle ordinate positive e concavità rivolta nel verso delle ascisse negative.

Relativamente all'intervallo]1;+∞[il diagramma coincide con il corrispondente arco della parabola di equazione $y = x^2 - x$, il cui vertice è il punto V(1/2;-1/4). La rappresentazione grafica è riportata in Figura 2. Il codominio della funzione in oggetto è l'intervallo [0;+∞[.

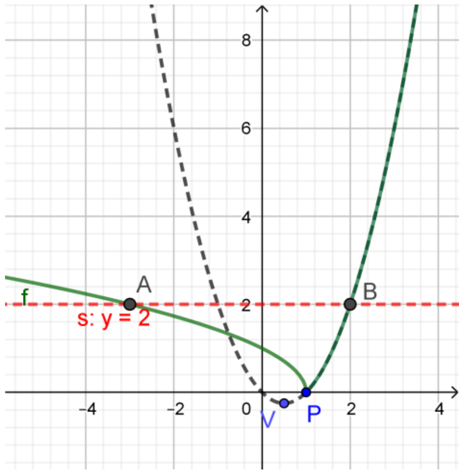

Figura 2

c. L'equazione f(x)=2 va studiata separatamente in ciascuno dei due intervalli]-∞;1],]1;+∞[. Nel primo intervallo la forma dell'equazione è $\sqrt{1-x} = 2$.

Si tratta di un'equazione irrazionale intera che ha come unica radice x=-3 e questo valore appartiene all'intervallo]-∞;1].

Nel secondo intervallo l'equazione è

$x^2 - x = 2 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$, le cui radici sono x_1=-1, x_2=2, delle quali solo la seconda appartiene all'intervallo di riferimento]1;+∞[. Concludiamo che l'equazione f(x)=2 ammette come insieme di soluzioni S={-3;2}.

In relazione al punto reale 2, che è un valore del codominio della funzione, l'insieme S rappresenta l'antimmagine della funzione relativamente al punto suddetto e si scrive: $f^{-1}(\{2\}) = \{-3;2\}$