Grafici probabili di tre funzioni

Con determinazione di: dominio, segno e zeri,

studio dei limiti agli estremi e individuazione degli asintoti

Es1) $f(x)=x\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ Funzione algebrica irrazionale fratta.

Dominio: R-{1}

La funzione è definita per i valori della variabile reale che rendono non negativo l'argomento della radice quadrata:

$\frac{x}{x+1}\geq 0$. La disequazione è soddisfatta per $(x<-1)\vee(x\geq 0)$, dunque il dominio è $D=]-\infty;-1[\cup[0;+\infty[$.

Segno e zeri

f(x)>0 per x>0;

f(x)<0 per x<-1.

La funzione si annulla nel punto x=0.

Limiti ed eventuali asintoti

La frontiera del dominio è $F_r(D)=\{-\infty;-1;0;+\infty\}$. La funzione è continua in tutto il suo dominio.

$\lim_{x\to-\infty} x\sqrt{\frac{x}{x+1}}=-\infty\cdot 1=-\infty$; $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x}{x+1}}=1=m$ questo è il valore del coefficiente angolare del probabile asintoto obliquo per x→-∞; si deve studiare ancora il seguente limite

$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x\sqrt{\frac{x}{x+1}}-x\right]=\lim_{x\to-\infty}x\left[\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1\right]=\infty\cdot 0$ (forma indeterminata). Procediamo:

$$\lim_{x\to-\infty} x\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1\right)\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}+1\right)}{\sqrt{\frac{x}{x+1}}+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-x}{x+1}}{\sqrt{\frac{x}{x+1}}+1}=-\frac{1}{2}$$

La retta $s: y=x-\frac{1}{2}$ è **asintoto obliquo** per il grafico per x→-∞.

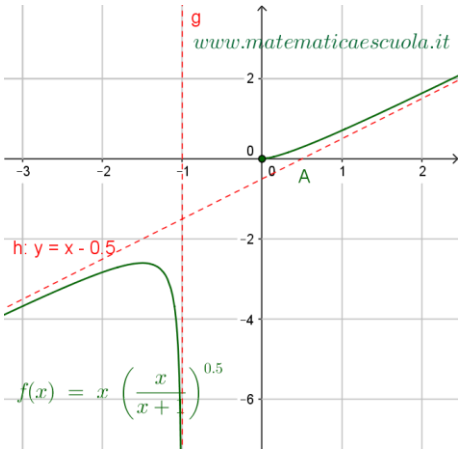


Figura 1- Diagramma della funzione

Si riconosce anche che risulta

$\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{\frac{x}{x+1}}=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=-\frac{1}{2}$, quindi la retta $s: y=x-\frac{1}{2}$ è anche asintoto obliquo per il grafico per x→+∞.

$\lim_{x\to(-1)^-} x\sqrt{\frac{x}{x+1}}=-1\cdot\sqrt{\frac{-1}{0^-}}=-1\cdot\sqrt{-1\cdot(-\infty)}=-1\cdot(+\infty)=-\infty$

Si conclude che la retta x=-1 è **asintoto verticale** da sinistra per il grafico.

In Figura 1 è riportato il diagramma della funzione. Ulteriori studi permetteranno di comprendere e giustificare adeguatamente la forma del grafico.

Es2) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-2x$ Funzione algebrica irrazionale intera.

Dominio: La funzione è definita e continua su tutto l'asse reale: D=R

Segno e zeri

$f(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=2x\Leftrightarrow\left(x^2+1=4x^2\right)\wedge(x\geq 0)$, da cui $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$; questo è l'unico zero della funzione.

Osserviamo che $f(x)>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>2x$; la disuguaglianza è senz'altro verificata per x≤0. Per x>0, elevando al quadrato e riducendo i termini simili si perviene alla disequazione $3x^2<1$ che è verificata per $\left(0<x<\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. In conclusione la funzione assume segno positivo per $x<\frac{1}{\sqrt{3}}$ e negativo per $x>\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Limiti ed eventuali asintoti

La frontiera del dominio è $F_r(D)=\{-\infty;+\infty\}$.

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-2x=+\infty;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}-\frac{2x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}-2=\left(\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)-2=-3=m_1$$

Studiamo il limite

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-m_1x\right]=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

La retta **s₁**:y=-3x è **asintoto obliquo** per $x\to$-∞.

Analogamente per $x\to+\infty$ si trova:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-2x=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2\right)=-\infty;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2\right)}{x}=-1=m_2;\ \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-m_2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

Si conclude che la retta **s₂**:y=-x è **asintoto obliquo** per $x\to+\infty$.

Riportiamo il diagramma della funzione in Figura 2

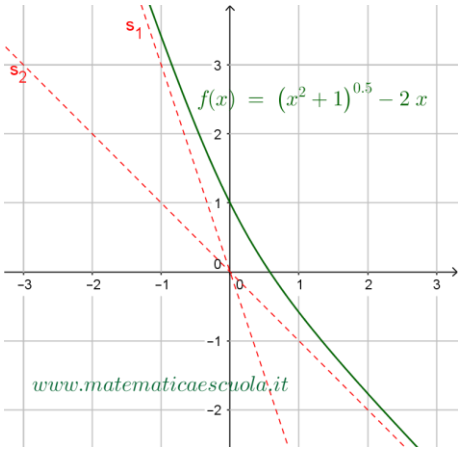


Figura 2

Es3) $f(x)=\frac{2-\ln(x)}{1+\ln(x)}$ Funzione trascendente logaritmica fratta.

Dominio: Per l'esistenza della funzione è necessario che la variabile x assuma valori positivi, perché è argomento della funzione logaritmica e che il denominatore della frazione risulti diverso da zero.

C.d.E.: $(x>0)\wedge(1+\ln(x)\neq 0)\to(x>0)\wedge(x\neq e^{-1})$. Il dominio è: $D=\left]0;e^{-1}\right[\cup\left]e^{-1};+\infty\right[$.

Segno e zeri

$f(x)=0\Leftrightarrow 2-\ln(x)=0$,soddisfatta per $x=e^2$.

Per il segno osserviamo che

- Il numeratore $N(x)>0\Leftrightarrow 2>\ln(x)\Leftrightarrow 0<x<e^2$;
- Il denominatore $D(x)>0\Leftrightarrow \ln(x)>-1\Leftrightarrow x>e^{-1}$.

Dal confronto dei segni del numeratore e del denominatore nel dominio di definizione si conclude che

$f(x)<0$ per $(0<x<e^{-1})\vee(x>e^2)$;

$f(x)>0$ per $(e^{-1}<x<e^2)$

Limiti ed eventuali asintoti

La frontiera del dominio è $F_r(D)=\{0;e^{-1};+\infty\}$.

$\lim_{x\to0^+}\frac{2-\ln(x)}{1+\ln(x)}=\frac{2-(-\infty)}{1+(-\infty)}=\frac{\infty}{\infty}$ Si tratta di una forma indeterminata.

Ponendo $\ln(x)=y$ il limite in esame si trasforma nel seguente

$$\lim_{y\to-\infty}\frac{2-y}{1+y}=\lim_{y\to-\infty}\left(\frac{3}{1+y}-1\right)=\frac{3}{-\infty}-1=-1$$

Quindi il grafico della curva tende verso il punto A(0;-1); detto punto, tuttavia, non appartiene al grafico perché la funzione non è definita per x=0.

Quindi la retta s_2:y=-1 è asintoto orizzontale per x→+∞.

Studio dei limiti laterali nel punto $x=e^{-1}$.

$$\lim_{x\to(e^{-1})^-}\frac{2-\ln(x)}{1+\ln(x)}=\frac{2-\ln(e^{-1})}{1+\ln(e^{-1})}=\frac{2+1}{1+(-1)^-}=\frac{3}{0^-}=-\infty\ ;$$

$$\lim_{x\to(e^{-1})^+}\frac{2-\ln(x)}{1+\ln(x)}=\frac{2-\ln(e^{-1})}{1+\ln(e^{-1})}=\frac{2+1}{1+(-1)^+}=\frac{3}{0^+}=+\infty\ ;$$

si conclude che la retta s_1:$x=e^{-1}$ è asintoto verticale da destra e da sinistra.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\ln(x)}{1+\ln(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-y}{1+y}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{1+y}-1\right)=-1$$

La retta s2:y=-1 è asintoto orizzontale per x→+∞.

Il diagramma della funzione è riportato in Figura 3.

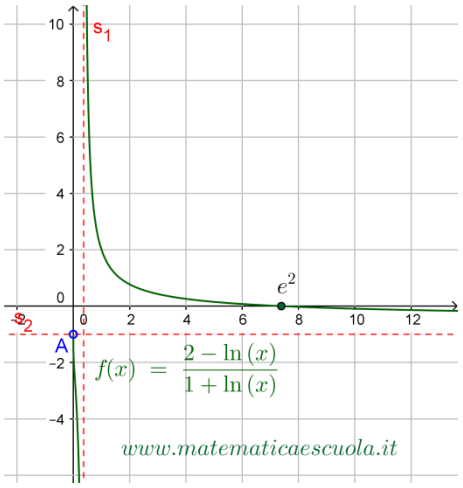


Figura 3- Si osservi che il punto A(0;e^{-1}) non appartiene al grafico della funzione e per questo motivo è evidenziato con un cerchietto vuoto.