Esercitazione sulle funzioni composte

Costruzione analitica di funzioni composte con tre funzioni. Quesiti vari.

In relazione alle funzioni reali di variabile reale $f(x)=\frac{1}{x+1}$, $g(x)=\sqrt{1-x}$, $h(x)=x^2-1$ risolvere i quesiti che seguono.

1) Determinare la struttura algebrica ed i relativi dominio e codominio della funzione $h\circ g\circ f$.
2) Calcolare $h(g(f(0)))$ e risolvere l'equazione $h(g(f(x)))=2$.
3) Determinare la struttura algebrica e il relativo dominio di definizione, della funzione $g(f(h(x)))$ e riconoscere che è una funzione pari.
4) Risolvere l'equazione $g(f(h(x)))=\frac{1}{2}$.
5) Determinare la struttura algebrica della funzione $f(h(g(x)))$, determinando i relativi dominio e codominio. Risolvere infine l'equazione $f(h(g(x)))=-x$.

Elaborazioni

1) La funzione *f* è definita in $D_f=R-\{-1\}$, la funzione g è definita in $D_g=]-\infty;1]$, la funzione h è definita in tutto R: $D_h=R$. I codomini delle funzioni sono:

   per *f*, $C_f=R_0$; per *g*, $C_g=[0;+\infty[$; per *h*, $C_h=[-1;+\infty[$.

   Costruzione della struttura algebrica della funzione composta $h\circ g\circ f$

$$h\circ g\circ f: x\in D_f \xrightarrow{f} \frac{1}{x+1}=y\in D_g \xrightarrow{g} \sqrt{1-y}=\sqrt{1-\frac{1}{x+1}}=z\in R \xrightarrow{h} z^2-1=\left(\sqrt{1-\frac{1}{x+1}}\right)^2-1=-\frac{1}{x+1}$$

   dunque $h(g(f(x)))=-\frac{1}{x+1}$. Per quanto concerne il dominio di definizione della funzione composta ottenuta, dovendo essere soddisfatta la condizione $1-y\geq 0$, cioè $1-\frac{1}{x+1}\geq 0$, si deduce che il dominio di definizione della funzione è $D_{h\circ g\circ f}=]-\infty;-1[\cup[0;+\infty[$. Il codominio della funzione è $C_{h\circ g\circ f}=R_0$.

   Il diagramma della funzione è in Figura 1.

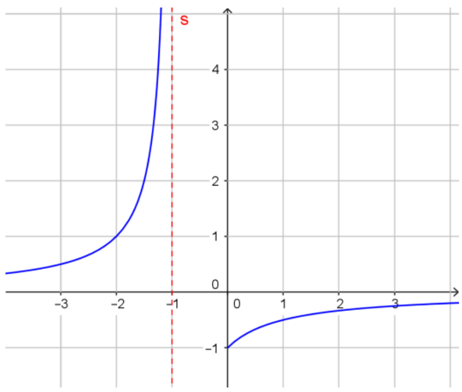

Figura 1

2) $h(g(f(0)))=-\frac{1}{x+1}=-1$

   Risoluzione dell'equazione

$h\left(g\left(f\left(x\right)\right)\right)=2$, che si presenta nella forma $-\frac{1}{x+1}=2$, soddisfatta da $x=-\frac{3}{2}$.

3) $g\circ f\circ h: x\in D_h=R\xrightarrow{h}x^2-1=y\in D_f\xrightarrow{f}\frac{1}{y+1}=\frac{1}{x^2-1+1}=\frac{1}{x^2}=z\in D_h\xrightarrow{g}\sqrt{1-z}=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=g\left(f\left(h\left(x\right)\right)\right)$

Osserviamo che la condizione $y\in D_f$, quindi $y\neq$-1, porta ad escludere x=0, come deve essere per l'esistenza di $1/x^2$. Ancora, l'espressione ottenuta per la funzio0ne composta g(f(h(x))) richiede che sia soddisfatta la condizione $1-\frac{1}{x^2}\geq 0$, verificata per $\left(x\leq -1\right)\vee\left(x\geq 1\right)$. Il dominio della funzione composta in oggetto è dunque $D_{g\circ f\circ h}=\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right[$.

Il dominio è simmetrico rispetto all'origine dell'asse reale x =0 e si riconosce immediatamente che al funzione è pari:

$$\forall x\in D_{g\circ f\circ h},\ g\left(f\left(h\left(-x\right)\right)\right)=\sqrt{1-\frac{1}{\left(-x\right)^2}}=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=g\left(f\left(h\left(x\right)\right)\right).$$

4) Risoluzione dell'equazione

$g\left(f\left(h\left(x\right)\right)\right)=\frac{1}{2}$, che ha la forma $\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$, ed elevando al quadrato i due membri si ha

$1-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{4}\rightarrow\frac{1}{x^2}=\frac{3}{4}$, soddisfatta dai valori $x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$, entrambi appartenenti al dominio di definizione.

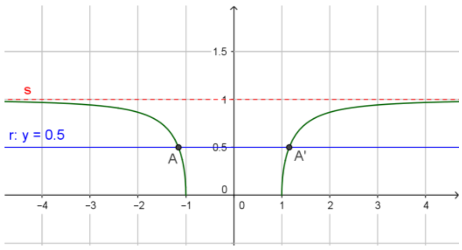

Figura 2

In Figura 2 è rappresentato il grafico della funzione e sono indicati i due punti A, A' di intersezione del grafico della funzione con la retta r:y=0,5, le cui ascisse sono quindi le radici dell'equazione $g\left(f\left(h\left(x\right)\right)\right)=\frac{1}{2}$.

5) Costruzione della struttura della funzione $f\left(h\left(g\left(x\right)\right)\right)$

$$f\circ h\circ g: x\in D_g\xrightarrow{g}\sqrt{1-x}=y\in D_h=R\xrightarrow{h}y^2-1=\left(\sqrt{1-x}\right)^2-1=$$
$$-x=z\in D_f\xrightarrow{f}\frac{1}{z+1}=\frac{1}{-x+1}=f\left(h\left(g\left(x\right)\right)\right)$$

Il dominio di definizione della funzione è $D_{f\circ h\circ g}=\left]-\infty;1\right[$ e il codominio è $C_{f\circ h\circ g}=\left]0;+\infty\right[$.

Risoluzione dell'equazione $f\left(h\left(g\left(x\right)\right)\right)=-x$

$\frac{1}{-x+1}=-x$, con x<1 si trasforma nell'equazione

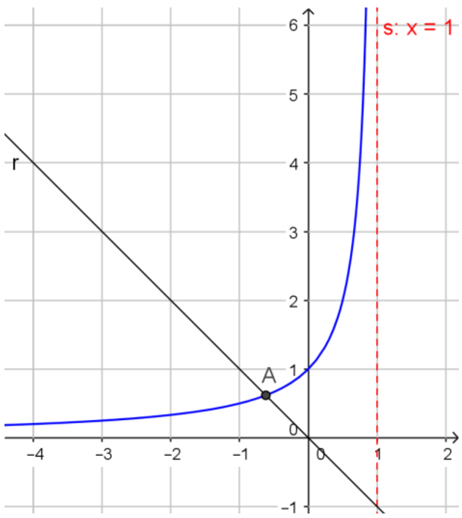

Figura 3

equivalente $x^2 - x - 1 = 0$, soddisfatta dai due valori $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 1$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$. Dei due valori solo il primo appartiene al dominio della funzione, quindi il secondo va scartato.

In Figura 3 si osserva il diagramma della funzione e il punto del grafico $A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ in cui la retta r:y=- x interseca il diagramma della funzione in oggetto.