

Esercizi sulla composizione di funzioni

- 1) Considerate le funzioni reali di variabile reale $f(x) = 1 - \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$, determinare le funzioni composte $g \circ f$, $f \circ g$, precisando i relativi domini di definizione. Rappresentare i diagrammi delle funzioni composte ottenute.

Elaborazioni

La funzione f è irrazionale intera ed ha come dominio l'intervallo $[0; +\infty[$.

La funzione g è razionale fratta ed ha come dominio di definizione $\mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}_0$.

Costruzione della funzione $g \circ f$

$$x \xrightarrow{f} \begin{cases} 1 - \sqrt{x} = y \\ C.E.: x \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{g} \begin{cases} \frac{1}{y} \\ C.E.: y \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1 - \sqrt{x}} \\ C.E.: (x \geq 0) \wedge (x \neq 1) \end{cases}$$

Dunque, risulta $g(f(x)) = \frac{1}{1 - \sqrt{x}}$, con

dominio $D = [0; 1[\cup]1; +\infty[$.

Il codominio della funzione è

$Codom(g \circ f) =]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[$.

Costruzione della funzione $f \circ g$

$$x \xrightarrow{g} \frac{1}{x} = y \xrightarrow{f} \begin{cases} 1 - \sqrt{y} \\ C.E.: y \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - \sqrt{\frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \\ C.E.: x > 0 \end{cases}$$

Risulta $f(g(x)) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$, con dominio di definizione $D =]0; +\infty[$. Il codominio della funzione è

$Codom(f \circ g) =]-\infty; 1[$.

In Figura 1 sono rappresentati i diagrammi delle due funzioni composte $g \circ f$, $f \circ g$.

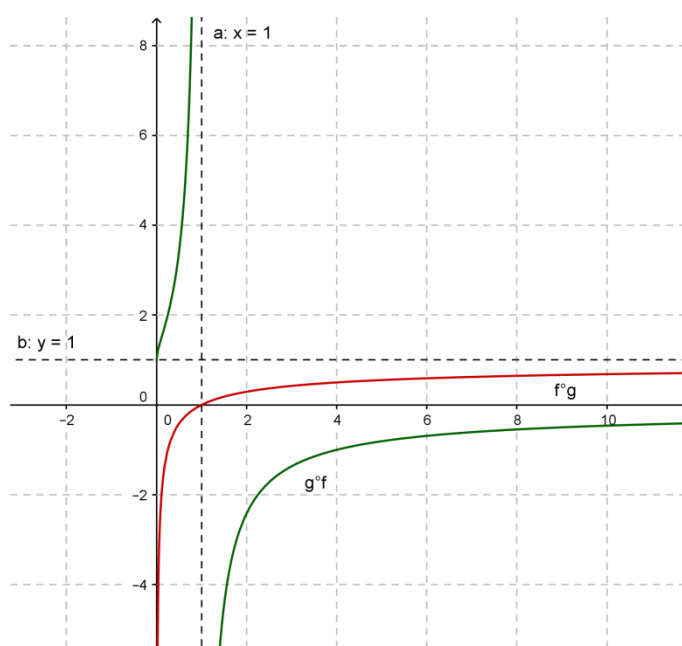


Figura 1-Il diagramma della funzione composta $g(f(x))$ è in colore verde, quello della funzione $f(g(x))$ in colore rosso.

*** **

- 2) Considerate le funzioni reali di variabile reale $f(x) = \log(1-|x|)$, $g(x) = \sqrt{x}$, determinare le funzioni composte $g \circ f$, $f \circ g$, precisando i relativi domini di definizione. Rappresentare i diagrammi delle funzioni composte ottenute.

Elaborazioni

Costruzione della funzione $g \circ f$

La funzione logaritmica $f(x) = \log(1-|x|)$ è definita solo per i valori reali della variabile che rendono l'argomento del logaritmo strettamente positivo: $1-|x| > 0$, dunque per $-1 < x < 1$.

La funzione irrazionale $g(x) = \sqrt{x}$ è definita per i valori reali $x \geq 0$.

Ciò premesso risulta

$$x \xrightarrow{f} \begin{cases} \log(1-|x|) = y \xrightarrow{g} \begin{cases} \sqrt{y} \\ C.E.: y \geq 0 \end{cases} \\ C.E.: -1 < x < 1 \end{cases} \\ = \begin{cases} \sqrt{\log(1-|x|)} \\ C.E.: (x=0) \end{cases}$$

Si conclude che la funzione composta $g \circ f$ è definita solo per $x=0$ e risulta

$$g(f(0)) = 0. \text{ Il dominio è } D = \{0\}.$$

Costruzione della funzione $f \circ g$.

$$x \xrightarrow{g} \begin{cases} \sqrt{x} = y \xrightarrow{f} \begin{cases} \log(1-|y|) = \log(1-\sqrt{x}) \\ C.E.: -1 < y = \sqrt{x} < 1 \end{cases} \\ C.E.: x \geq 0 \end{cases} \\ = \begin{cases} \log(1-\sqrt{x}) \\ C.E.: (0 \leq x < 1) \end{cases}$$

La funzione composta è definita nell'intervallo $[0;1[$.

In Figura 2 sono rappresentati i diagrammi delle due funzioni composte ottenute. Si precisa che il diagramma della funzione $g \circ f$ è composto solo dal punto A(0;0).

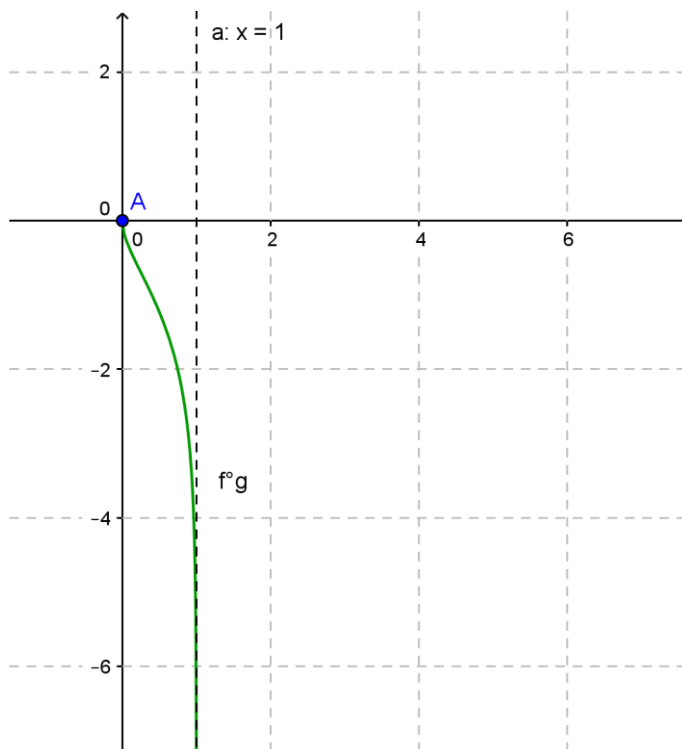


Figura 2- Il diagramma della funzione $g(f(x))$ è rappresentato solo dal punto A(0;0); quello della funzione $f(g(x))$ è in colore verde, compreso il punto A.

*** **

- 3) Considerate le funzioni reali di variabile reale $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$, $g(x) = \frac{2}{x-1}$, $h(x) = x - \frac{1}{x}$,
determinare le funzioni composte $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$, $f \circ h \circ g$, precisando i relativi domini di
definizione.

Risposte

$$h(g(f(x))) = \frac{4}{x-6} - \frac{x-6}{4}, \text{ con } \text{Dom}(h \circ g \circ f) = \mathbb{R} - \{6\}$$

$$g(f(h(x))) = \frac{4x}{x^2 - 6x - 1}, \text{ con } \text{Dom}(g \circ f \circ h) = \mathbb{R} - \{3 - \sqrt{10}; 0; 3 + \sqrt{10}\}$$

$$f(h(g(x))) = \frac{x^2 + 6x - 11}{4(1-x)}, \text{ con } \text{Dom}(f \circ h \circ g) = \mathbb{R} - \{1\}$$