

Domini di funzioni

Classificare le funzioni e determinare i relativi domini di definizione.

- | | |
|--|--|
| 1) $f(x) = \frac{x^2 - 2 x }{4 - x^2}$ | $D = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$ |
| 2) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2 - x}}$ | $D =]-\infty; 2[$ |
| 3) $f(x) = (x - 3)^{\frac{2}{x-4}}$ | $D = \{x \in \mathbb{R} : (x > 3) \wedge (x \neq 4)\}$ |
| 4) $f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2} - 1}{x^2 + x - 2}$ | $D =]-2; 2[- \{1\}$ |
| 5) $f(x) = \log_{(x-2)}\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$ | $D =]3; +\infty[$ |
| 6) $f(x) = \frac{e^{\frac{x}{x-1}}}{\sqrt{2 - x }}$ | $D =]-2; 2[- \{1\}$ |
| 7) $f(x) = \frac{\sqrt{e^x - e^{2x}}}{2x^2 + x}$ | $D =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}; 0[$ |
| 8) $f(x) = \frac{\log(x+3)}{\log(x-2) - 1}$ | $D =]2; +\infty[- \{2 + e\}$ |
| 9) $f(x) = \sqrt{\log_2(\log_2(3x+2))}$ | $D = [0; +\infty[$ |
| 10) $f(x) = \sqrt[4]{\log_{(2x-1)}(\log_2(3x+2))}$ | $D =]1; +\infty[$ |

Soluzione

- 1) $f(x) = \frac{x^2 - 2|x|}{4 - x^2}$ La funzione è algebrica razionale fratta ed esiste per tutti i valori della variabile che non annullano il denominatore. Si può semplificare l'espressione della funzione discutendo il segno del modulo.

Risulta:

- a. per $x \geq 0$, $f(x) = \frac{x^2 - 2|x|}{4 - x^2} = \frac{x^2 - 2x}{4 - x^2} = \frac{x(x-2)}{(2+x)(2-x)} = \frac{-x}{x+2}$, con $x \neq 2$;
- b. per $x < 0$, $f(x) = \frac{x^2 - 2|x|}{4 - x^2} = \frac{x^2 + 2x}{4 - x^2} = \frac{x(x+2)}{(2+x)(2-x)} = \frac{x}{2-x}$, con $x \neq -2$.

Concludiamo che il dominio della funzione è l'insieme $D = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$ e la sua espressione esplicita è

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x+2} & \text{per } (x \geq 0) \wedge (x \neq 2) \\ \frac{x}{2-x} & \text{per } (x < 0) \wedge (x \neq -2) \end{cases}$$

- 2) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2-x}}$ La funzione è irrazionale fratta ed esiste per i valori della variabile che rendono strettamente positivo l'argomento della radice quadrata, dunque deve risultare $2-x > 0$, da cui $x < 2$. Il dominio della funzione è l'intervallo $D =]-\infty; 2[$.

- 3) $f(x) = (x-3)^{\frac{2}{x-4}}$ Si tratta di una funzione potenza. con base ed esponente variabili, per la cui esistenza è necessario che la base assuma valori strettamente positivi; inoltre, poiché l'esponente è una frazione è necessario che il suo denominatore sia diverso da zero. Il dominio di definizione è formato dai valori reali x soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} x-3 > 0 \\ x-4 \neq 0 \end{cases}, \text{ soddisfatto dai punti dell'insieme } D = \{x \in \mathbb{R} : (x > 3) \wedge (x \neq 4)\}$$

- 4) $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2} - 1}{x^2 + x - 2}$ La funzione è algebrica irrazionale fratta ed esiste per tutti i valori che rendono non negativo l'argomento della radice quadrata e diverso da zero il denominatore.

$$\text{C.d.E. } \begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x^2 + x - 2 \neq 0 \end{cases}, \text{ da cui } \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ (x \neq -2) \wedge (x \neq 1) \end{cases}.$$

Concludiamo che il dominio di definizione è $D =]-2; 2] - \{1\}$.

- 5) $f(x) = \log_{(x-2)}\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$ La funzione è trascendente logaritmica ed è definita per i valori della variabile che rendono positivo l'argomento del logaritmo e positiva e diversa da 1 (uno) la base dello stesso logaritmo. Quindi

$$\text{C.d.E. } \begin{cases} \frac{x+3}{x-3} > 0 \\ (x-2 > 0) \wedge (x-2 \neq 1) \end{cases}, \text{ da cui } \begin{cases} (x < -3) \vee (x > 3) \\ (x > 2) \wedge (x \neq 3) \end{cases}.$$

In conclusione di dominio di definizione è $D =]3; +\infty[$.

- 6) $f(x) = \frac{e^{\frac{x}{x-1}}}{\sqrt{2-|x|}}$ La funzione è trascendente, esponenziale mista ed esiste per i valori della variabile che rendono diverso da zero il denominatore della frazione $\frac{x}{x-1}$ e positivo l'argomento della radice quadrata, quindi

C.d.E. $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ 2-|x| > 0 \end{cases}$, da cui $\begin{cases} x \neq 1 \\ |x| < 2 \end{cases}$, quindi $\begin{cases} x \neq 1 \\ -2 < x < 2 \end{cases}$. Il dominio è $D =]-2; 2[- \{1\}$.

- 7) $f(x) = \frac{\sqrt{e^x - e^{2x}}}{2x^2 + x}$ La funzione è trascendente esponenziale fratta ed esiste per i valori della variabile che rendono non negativo l'argomento della radice quadrata e non nullo il denominatore.

C.d.E. $\begin{cases} e^x - e^{2x} \geq 0 \\ 2x^2 + x \neq 0 \end{cases}$, da cui $\begin{cases} e^x(1 - e^x) \geq 0 \\ x(2x+1) \neq 0 \end{cases}$, quindi $\begin{cases} 1 - e^x \geq 0 \\ (x \neq 0) \wedge (x \neq -\frac{1}{2}) \end{cases}$, ancora

$\rightarrow \begin{cases} e^x \leq 1 \\ (x \neq 0) \wedge (x \neq -\frac{1}{2}) \end{cases}$, quindi $\begin{cases} x \leq 0 \\ (x \neq 0) \wedge (x \neq -\frac{1}{2}) \end{cases}$. Concludiamo che il dominio di definizione è

$D =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}; 0[$

- 8) $f(x) = \frac{\log(x+3)}{\log(x-2)-1}$ Funzione trascendente logaritmica fratta, è definita per i valori della variabile che rendono positivi gli argomenti dei due logaritmi e diverso da zero il valore del denominatore della frazione.

C.d.E. $\begin{cases} x+3 > 0 \\ x-2 > 0 \\ \log(x-2)-1 \neq 0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x > -3 \\ x > 2 \\ \log(x-2) \neq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x-2 \neq e \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \neq 2+e \end{cases}$

Concludiamo che l'insieme di definizione è $D =]2; +\infty[- \{2+e\}$.

- 9) $f(x) = \sqrt{\log_2(\log_2(3x+2))}$ Si tratta di una funzione trascendente mista nella quale è presente la composizione di una funzione logaritmica con un polinomio e con una radice quadrata. Le condizioni di esistenza si determinano partendo dalla funzione più esterna (la radice quadrata) richiedendo che il suo argomento sia non negativo:

C.d.E. $\log_2(\log_2(3x+2)) \geq 0$, che diventa $\log_2(3x+2) \geq 1$, soddisfatta se $3x+2 \geq 2$, quindi se $x \geq 0$. Concludiamo che il dominio è $D = [0; +\infty[$.

- 10) $f(x) = \sqrt[4]{\log_{(2x-1)}(\log_2(3x+2))}$ Funzione composta trascendente logaritmica, con radice di indice pari. Per l'esistenza deve essere non negativo l'argomento della radice quarta.

C.d.E. $\log_{(2x-1)}(\log_2(3x+2)) \geq 0$

Lo studio di questa disequazione si esegue discutendo i due casi

10a) $2x-1 > 1$, quindi per $x > 1$;

10b) $0 < 2x - 1 < 1$, quindi per $\frac{1}{2} < x < 1$.

Primo caso

$$\begin{cases} x > 1 \\ \log_{(2x-1)}(\log_2(3x+2)) \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \log_2(3x+2) \geq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 3x+2 \geq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 3x \geq 0 \end{cases}, \text{ quindi } x > 1.$$

Secondo caso

$$\begin{cases} \frac{1}{2} < x < 1 \\ \log_{(2x-1)}(\log_2(3x+2)) \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0 < \log_2(3x+2) \leq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < 1 \\ 1 < 3x+2 \leq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < 1 \\ -\frac{1}{3} < x \leq 0 \end{cases}$$

Le disuguaglianze che compongono il sistema sono tra loro incompatibili, dunque il sistema non ha soluzioni.

Concludiamo che il dominio di definizione della funzione è composto soltanto dalle soluzioni trovate nel primo caso, quindi $D =]1; +\infty[$.