Limiti e continuità di funzioni contenenti la parte intera [*x*]

Per le funzioni $f(x)=\dfrac{x}{[x]}$, $g(x)=\dfrac{[x]}{x}$, risolvere i seguenti quesiti.

Q1- Precisare il dominio di definizione di ciascuna funzione.

Q2- Studiare i limiti

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{[x]}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{[x]}{x}$

Q3- Indicare il tipo di discontinuità che ciascuna funzione presenta nei punti in cui la stessa non è continua.

Soluzione

Q1- Dominio di definizione

Osserviamo che la funzione $f(x)$ è definita nell'insieme $A=]-\infty;0[\cup[1;+\infty[$ in quanto [x]=0 per 0≤x<1.

La funzione $g(x)$ è definita per ogni x≠0.

Q2- Limiti

a) Vogliamo provare che risulta $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{[x]}=1$ e per questo è necessario dimostrare che sussiste la seguente proposizione

$$\forall\varepsilon>0,\exists\bar{x}_\varepsilon\in R: x>\bar{x}_\varepsilon\wedge x\in A\Rightarrow\left|\frac{x}{[x]}-1\right|<\varepsilon \qquad (*)$$

…

b) Il limite $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{[x]}{x}$ è della forma -1/0 e poiché in un intorno sinistro di x=0 il denominatore è negativo, si conclude immediatamente che il valore del limite è +∞.

…

Note per il diagramma

Operatività con GeoGebra

Per ottenere il diagramma della funzione $g(x)=\dfrac{[x]}{x}$ …

Q3-

Punti di discontinuità per la funzione *f*(*x*)

La funzione *f*(*x*) ha nel punto *x*=0 una discontinuità di terza specie. …

La funzione nel punto x=1…

Punti di discontinuità per la funzione *g*(*x*)

La funzione presenta nel punto **x=0** una **discontinuità di seconda specie** …