

Proprietà di una funzione razionale fratta

Problema

Considerare la funzione $y = \frac{4x}{1+4x^2}$.

a) Limitatamente all'insieme delle $x > 0$,

a.1 provare che y è limitata

a.2 determinare il valore massimo

a.3 dedurre, da a.2, che $x=1/2$ è il punto di massimo

a.4 provare che per $x > 1/2$ la funzione è decrescente.

b) Dedurre da (a) l'andamento della funzione su tutto l'asse reale.

E' fatto assoluto divieto di usare derivate o qualsiasi utensile che appartenga all'analisi.

Soluzione

a)

a.1 Per dimostrare che $y(x)$ è limitata occorre provare che esistono due numeri reali h (minorante), k (maggiorante) che verificano la doppia disuguaglianza

$$h \leq \frac{4x}{1+4x^2} \leq k.$$

Ebbene, osserviamo che per $x > 0$ risulta $\frac{4x}{1+4x^2} > 0$, quindi la funzione è limitata inferiormente; possiamo assumere $h=0$.

Per quanto concerne l'individuazione di un maggiorante notiamo che per ogni x reale si ha

$(2x-1)^2 \geq 0$, da cui $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$, quindi $4x \leq 4x^2 + 1$ che possiamo scrivere nella forma

$\frac{4x}{4x^2 + 1} \leq 1$. Pertanto possiamo assumere $k=1$ e concludere che per ogni $x > 0$ risulta

$$0 \leq \frac{4x}{4x^2 + 1} \leq 1, \text{ perciò la funzione è limitata.}$$

a.2 e a.3 - Osserviamo che la disuguaglianza precedente $4x \leq 4x^2 + 1$, soddisfatta per ogni x reale,

diventa uguaglianza $4x = 4x^2 + 1$ per $x=1/2$ e per tale valore si ha $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4 \cdot \frac{1}{2}}{4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{2}{2} = 1$, cioè il

maggiorante $k=1$ è anche un valore della funzione e dunque è il massimo della stessa e $x=1/2$ è punto di massimo (assoluto).

a.4 –Per provare l'affermazione occorre dimostrare che

se $x > 1/2$, per ogni $h > 0$ risulta $y(x) \geq y(x+h)$.

Esplicitiamo la disuguaglianza da provare.

$y(x) \geq y(x+h)$ diventa $\frac{4x}{4x^2+1} \geq \frac{4(x+h)}{4(x+h)^2+1}$, equivalente alla disuguaglianza

$x(4(x+h)^2+1) \geq (x+h)(4x^2+1)$, ed eseguiti i prodotti e ridotti i termini simili, nonché tenuto conto che $h > 0$, si riconduce alla seguente

$$4x^2 + 4hx \geq 1, \text{ ovvero } 4x(x+h) \geq 1.$$

Poiché per ipotesi $x > 1/2$ e $h > 0$ sussistono le seguenti disuguaglianze

$$4x(x+h) > 4 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + h \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + h \right) > 2 \left(\frac{1}{2} + 0 \right) = 1,$$

dunque è anche vera la disuguaglianza $4x(x+h) \geq 1$.

Osservazione

La dimostrazione effettuata permette di affermare che la funzione in esame per $x > 1/2$ è strettamente decrescente.

- b)** La funzione, è definita su tutto l'asse reale ed è dispari, cioè soddisfa la proprietà $y(-x) = -y(x)$, per ogni x ; questa proprietà permette di affermare che il punto $x = -1/2$ è di minimo assoluto, con $y(-1/2) = -1$. Infine, per $x \rightarrow +\infty$ risulta $y(x) \rightarrow 0^+$ e per $x \rightarrow -\infty$ risulta $y(x) \rightarrow 0^-$.

A beneficio del lettore riportiamo a margine il diagramma della funzione analizzata.

