

Es_1) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & \text{per } x \leq 0 \\ \frac{3x^2 + 1}{2x - k} & \text{per } 0 < x \leq 1 \\ kx + 3 & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

stabilire per quali valori di k la funzione risulta continua nei punti $x=0$ ed $x=1$.

Soluzione

Osserviamo che in ciascuno degli intervalli $]-\infty; 0]$, $]1; +\infty[$, la funzione è un polinomio di primo grado, dunque è continua. Nell'intervallo $]0; 1]$ è una razionale fratta ed è continua purché in alcun punto dell'intervallo si annulli il denominatore. Affinché sia continua nei due punti $x=0$, $x=1$, considerato che detti punti sono di accumulazione per il dominio di definizione, deve verificarsi che i limiti in detti punti devono esistere, essere finiti e coincidenti con i rispettivi valori della funzione negli stessi punti. Ebbene risulta:

$$f(0) = -k = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 + 1}{2x - k} = -\frac{1}{k},$$

dunque deve essere $-k = -\frac{1}{k}$, da cui $k = \pm 1$ (*)

Imponendo la condizione per la continuità nel punto $x=1$ si ha:

$$f(1) = \frac{4}{2-k} = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (kx + 3) = k + 3.$$

Deve essere soddisfatta l'uguaglianza:

$$\frac{4}{2-k} = k + 3 \rightarrow k^2 + k - 2 = 0 \quad \text{da cui } (k = -2) \vee (k = 1) \quad (**)$$

Poiché devono essere soddisfatte entrambe le condizioni (*), (**), si conclude che deve essere $k=1$.

La funzione è dunque così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{per } x \leq 0 \\ \frac{3x^2 + 1}{2x - 1} & \text{per } 0 < x \leq 1 \\ x + 3 & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

Osservazione

La funzione ottenuta è definita in $A = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$, è continua in

ogni punto del dominio, ma presenta nel punto $x = \frac{1}{2}$ una

discontinuità di seconda specie.

Il diagramma della funzione è composto da due semirette e da due archi di iperbole. In figura è stato scelto un colore diverso per il diagramma in ciascuno dei tre intervalli.

Operatività con GeoGebra

Rappresentiamo la funzione limitatamente all'intervallo $[-5; 5]$

Curva[t, 2t-1, t, -5, 0] per $[-5; 0]$

Curva[t, (3t^2+1)/(2t-1), t, 0, 1] per $]0; 1/2[\cup]1/2; 1]$

Curva[t, t+3, t, 1, 5] per $]1; 5]$

