

Es_1) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} k\sqrt{1-x} & \text{per } x \leq 0 \\ 1-k\sqrt{x+1} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

determinare per quale valore del parametro k la funzione è continua in tutto il dominio di definizione.

Soluzione

La funzione è espressa da due forme irrazionali intere. In ciascuno degli intervalli $]-\infty; 0]$, $]0; +\infty[$ è continua. Dobbiamo determinare il valore di k in modo che si abbia la continuità anche nel punto $x=0$.

Poiché risulta:

$$f(0) = k = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - k\sqrt{x+1}) = 1 - k,$$

deve essere soddisfatta l'uguaglianza $k = 1 - k$, da cui $k = \frac{1}{2}$.

La funzione in esame è dunque così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{1-x} & \text{per } x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}\sqrt{x+1} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

Osservazione

Il lettore che conosce già il concetto di derivabilità in un punto osservi che **la funzione è derivabile in ogni punto del dominio**. In particolare $f'(0) = -\frac{1}{4}$.

Operatività con GeoGebra

Decidiamo di rappresentare il diagramma della funzione limitatamente all'intervallo $[-8; 8]$.

Utilizzando le equazioni in forma parametrica per i due archi di curva relativi agli intervalli $[-8; 0]$, $]0; 8]$, i comandi da inserire sono:

Curva[t, 0.5*sqrt(1-t), t, -8, 0], per $x \in [-8; 0]$;

Curva[t, 1-0.5*sqrt(t+1), t, 0, 8], per $x \in]0; 8]$

