

Es_1) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+k} - 1 & \text{per } x \leq -1 \\ e^{kx} - e^{-1} & \text{per } x > -1 \end{cases}$$

stabilire per quale valore di k la funzione è continua nel suo dominio.

Soluzione

In ciascuno degli intervalli $]-\infty; -1]$, $]-1; +\infty[$, la funzione è continua perché risulta la somma di un'esponenziale con una costante. Affinché la funzione sia continua in tutto il dominio di definizione deve essere continua anche nel punto $x = -1$. Detto punto è di accumulazione a sinistra e a destra per cui, risultando

$$f(-1) = e^{-1+k} - 1 = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (e^{kx} - e^{-1}) = e^{-k} - e^{-1},$$

la funzione è continua in $x = -1$ se e solo se sussiste l'uguaglianza: $e^{-1+k} - 1 = e^{-k} - e^{-1}$. Risolviamo l'equazione esponenziale ottenuta.

$e^{-1} \cdot e^k - 1 = e^{-k} - e^{-1} \rightarrow e^{-1} \cdot e^k - e^{-k} + e^{-1} - 1 = 0$; con $e^k = t$ otteniamo l'equazione razionale fratta

$$e^{-1} \cdot t - \frac{1}{t} + e^{-1} - 1 = 0, \text{ dalla quale, essendo } t \neq 0, \text{ si passa all'equazione } e^{-1} \cdot t^2 + (e^{-1} - 1)t - 1 = 0.$$

Le radici di quest'equazione sono:

$$t = \frac{-e^{-1} + 1 \pm \sqrt{(e^{-1} - 1)^2 + 4e^{-1}}}{2e^{-1}} = \frac{-e^{-1} + 1 \pm \sqrt{(e^{-1} + 1)^2}}{2e^{-1}} = \frac{-e^{-1} + 1 \pm (e^{-1} + 1)}{2e^{-1}};$$

$$t_1 = \frac{-e^{-1} + 1 - e^{-1} - 1}{2e^{-1}} = \frac{-2e^{-1}}{2e^{-1}} = -1,$$

$$t_2 = \frac{-e^{-1} + 1 + e^{-1} + 1}{2e^{-1}} = e$$

Osservato che $t_1 < 0$ e dunque che l'uguaglianza

$e^k = t_1 = -1$ non può essere soddisfatta da alcun valore reale di k , rimane la seconda possibilità: $e^k = t_2 = e$, da cui $k = 1$.

La funzione in esame è continua in $x = -1$ solo se $k = 1$. La funzione risulta così definita:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+1} - 1 & \text{per } x \leq -1 \\ e^x - e^{-1} & \text{per } x > -1 \end{cases}$$

Rappresentiamo il diagramma della funzione limitatamente all'intervallo $[-6; 4]$.

Operatività con GeoGebra

Per rappresentare il diagramma della funzione in ciascuno dei due intervalli $[-6; -1]$, $]-1; 4]$, inseriamo nella barra della formula il comando che sfrutta le equazioni parametriche dei rispettivi archi. implementiamo

Comando: `Curva[t, e^(t+1)-1, t, -6, -1]` per $[-6; -1]$

Comando: `Curva[t, e^t-e^(-1), t, -1, 4]` per $[-1; 4]$

