

Funzioni definite per casi

1) Si consideri la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+k}{x+2k} & \text{per } x \leq 0 \\ \frac{\ln(1+kx^2)}{x^2} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

- Determinare per quale valore del parametro reale k la funzione è continua nel punto $x=0$.
- Per il valore di k determinato nel precedente punto precisare il dominio di definizione della funzione e se la stessa presenta punti di discontinuità; in caso affermativo indicare quali siano i punti di discontinuità e la relativa specie.

2) Si consideri la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{kx}-1}{x} & \text{per } x < 0 \\ \frac{1-\cos(kx)}{x^2} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

- Stabilire per quale valore di k esiste ed è finito il limite della funzione nel punto $x=0$.
- Per il valore trovato per k nel precedente punto definire la funzione prolungamento per continuità della funzione ottenuta.

Elaborazioni

Esercizio-1

a) Studiamo i limiti laterali per $x \rightarrow 0$ della funzione.

a. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+k}{x+2k} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$, con la condizione $k \neq 0$.

b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+kx^2)}{x^2} \stackrel{k \neq 0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+kx^2)}{kx^2} \cdot k =$
 $\stackrel{(1)}{=} 1 \cdot k = k$

c. I due limiti laterali coincidono solo se $k=1/2$. Per detto valore la funzione è così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{2(x+1)} & \text{per } (x \leq 0 \wedge x \neq -1) \\ \frac{\ln(1+x^2/2)}{x^2} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

b) La funzione ottenuta è definita in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Si riconosce che non esiste il limite per $x \rightarrow -1$ e che risulta

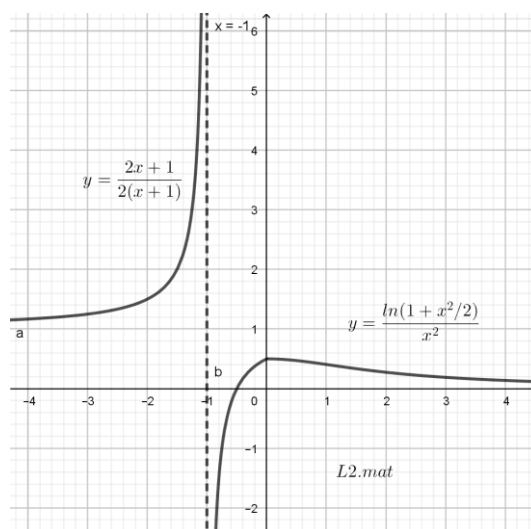


Figura 1

⁽¹⁾ Si tenga presente il limite notevole $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2x+1}{2(x+1)} = \frac{-1}{2 \cdot 0^-} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2x+1}{2(x+1)} = \frac{-1}{2 \cdot 0^+} = -\infty$$

La funzione presenta nel punto $x=-1$ una discontinuità di seconda specie. Il suo diagramma è rappresentato in Figura 1. Si osservi che nel punto $x=0$ il ramo sinistro della curva si raccorda con continuità con il ramo destro, risultando ovviamente $f(0) = 1/2$.

Esercizio-2

Studiamo i limiti laterali per $x \rightarrow 0$.

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{kx} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{kx} - 1}{kx} \cdot k =^{(2)} 1 \cdot k = k$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(kx)}{x^2} \quad \text{Il limite è della forma } 0/0.$$

Ricordiamo che sussiste il limite notevole $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$. Elaboriamo il limite come segue:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(kx)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(kx)}{k^2 x^2} \cdot k^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(kx)}{(kx)^2} \cdot k^2 = \frac{1}{2} \cdot k^2.$$

I valori dei limiti laterali sono finiti e la funzione ammette per $x \rightarrow 0$ limite solo se i due valori trovati coincidono. Imponiamo dunque che sia soddisfatta l'uguaglianza: $\frac{1}{2} k^2 = k$.

L'uguaglianza è soddisfatta se $k=0$ oppure $k=2$. Poiché nel corso delle elaborazioni dei limiti si è precisato che i risultati ottenuti richiedono che sia $k \neq 0$ si conclude che l'unico valore accettabile è $k=2$.

La funzione in esame è così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 1}{x} & \text{per } x < 0 \\ \frac{1 - \cos(2x)}{x^2} & \text{per } x > 0 \end{cases} \quad \text{e risulta}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2} = 2$$

b) La funzione prolungamento per continuità della funzione in oggetto è così definita

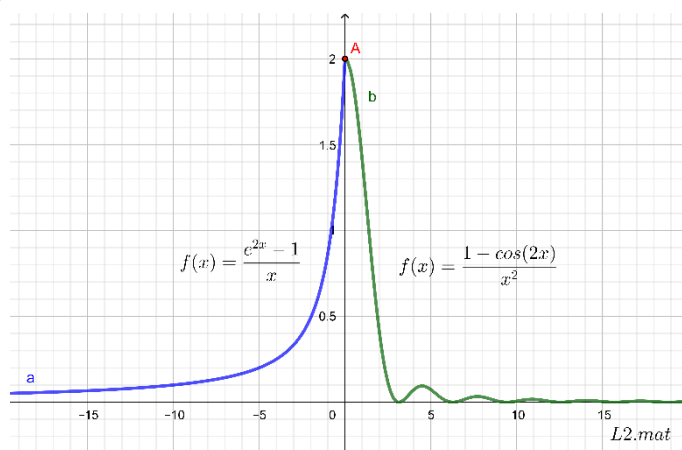


Figura 2

⁽²⁾ Si ricordi il limite notevole $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x} & \text{per } x < 0 \\ 2 & \text{per } x = 0 \\ \frac{1-\cos(2x)}{x^2} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

Il diagramma della funzione prolungamento per continuità è riportato in Figura 2.