Funzione trascendente definita per casi

Discontinuità, segno, zeri, asintoti. Inversa di una restrizione.

In relazione alla funzione così definita $f(x)=\begin{cases} x\cdot e^{x-2} & per \quad x\le 2 \\ (x-2)^2 & per \quad x>2 \end{cases}$

risolvere i quesiti che seguono.

a) Determinare il dominio di definizione e precisare il segno e gli zeri.

b) Precisare la continuità della funzione e classificare in particolare il punto x=2.

c) Studiare i limiti agli estremi del dominio di definizione precisando se il relativo diagramma ammette asintoti, determinandoli in caso affermativo.

d) Dimostrare che la funzione in esame è strettamente crescente nell'intervallo]2;+∝[.

e) Tenendo conto della stretta crescenza della funzione nell'intervallo]2;+∝[e del valore del limite per x→+∝, definire l'espressione della funzione inversa della restrizione della funzione in esame al suddetto intervallo.

Elaborazioni

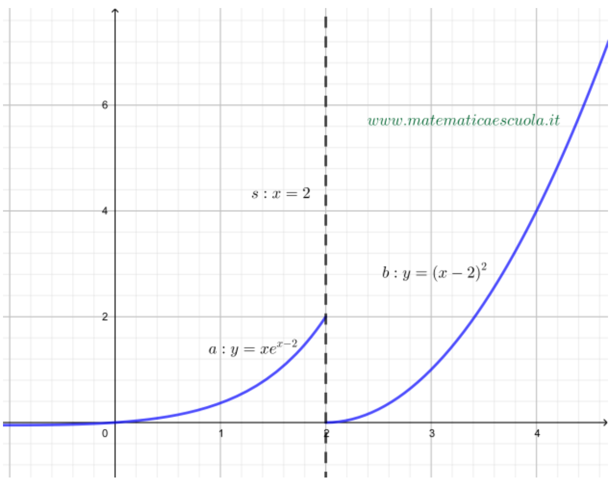
a) La funzione è definita su tutto l'asse reale.

La funzione è negativa per x<0, si annulla per x=0 ed è positiva in ogni altro punto del dominio.

b) Il punto x=2 è di accumulazione a destra ed a sinistra. Studiamo i due limiti laterali.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x-2)^2=0;\quad \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} x\cdot e^{x-2}=2\cdot e^0=2.$$

Nel punto x=2 la funzione presenta una discontinuità di prima specie perché i due limiti laterali esistono, sono finiti e diversi tra loro. Negli altri punti del dominio la funzione è positiva.



Aggiungiamo che nel punto x=2 la funzione ha un salto negativo il cui valore è:

$$\sigma=\lim_{x\to 2^+} f(x)-\lim_{x\to 2^-} f(x)=0-2=-2$$

c) Limiti ed asintoti

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}(x-2)^2=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(x-2)^2}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-4x+4}{x}=\lim_{x\to +\infty}\left(x-4+\frac{4}{x^2}\right)=+\infty$$

Per x→+∝ non esiste alcun asintoto.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\cdot e^{x-2} = -\infty\cdot 0$ Si tratta di una forma indeterminata; il limite però esiste ed è zero, come si riconosce riconducendolo alla forma ∞/∞ come segue

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x+2}} = \frac{-\infty}{+\infty}$$

Infatti, l'infinito del numeratore ha ordine 1 (uno), mentre quello al denominatore non ha ordine, ma supera qualsiasi ordine di infinito prestabilito[(1)], per cui il valore del limite è 0.

Questo risultato indica che il diagramma della funzione per $x\to-\infty$ ammette come asintoto orizzontale l'asse delle ascisse. Avendo precisato prima che per x<0 la funzione è negativa aggiungiamo che il diagramma della funzione per $x\to-\infty$ si avvicina all'asse delle ascisse rimanendo nel semipiano delle ordinate negative, quindi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$.

d) Per dimostrare che la funzione è strettamente crescente nell'intervallo $]2;+\infty[$ occorre provare che sussiste la seguente proposizione:

$\forall x_1, x_2 \in]2;+\infty[,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Ebbene, poniamo $x_2 = x_1 + h$, con $h>0$; si ha:

$$f(x_1) = (x_1-2)^2; \qquad f(x_2) = (x_2-2)^2 = (x_1+h-2)^2 = (x_1-2)^2 + 2h(x_1-2) + h^2 = f(x_1) + 2h(x_1-2) + h^2;$$

poiché da $x_1>2$ segue che $x_1-2>0$ e risulta anche $h>0$, sarà $2h(x_1-2)+h^2>0$ e perciò risulta anche $f(x_2) > f(x_1)$. C.V.D.

e) Consideriamo la restrizione della funzione f relativamente all'intervallo $]2;+\infty[$;

$f_{]2;+\infty[}(x) = (x-2)^2$ il cui codominio è $]0;+\infty[$.

Ponendo $y = f_{]2;+\infty[}(x)$, la funzione inversa $x = f^{-1}_{]2;+\infty[}(y)$ è definita in $]0;+\infty[$ ed assume valori in $]2;+\infty[$ e la sua forma algebrica è $x = f^{-1}_{]2;+\infty[}(y) = 2+\sqrt{y}$.

[(1)] Questo concetto si esprime solitamente con la locuzione "l'infinito della funzione al denominatore è di ordine infinitamente grande".