Funzioni definite per casi

1) In relazione alla funzione $f(x)=\begin{cases} \dfrac{senx}{x} & per \quad x<0 \\ 2x+1 & per \quad 0\le x<1 \\ e^{2-x} & per \quad x\ge 1 \end{cases}$ stabilire se possiede punti di discontinuità

e precisarne il comportamento per x→-∞ e x→+∞ .

Elaborazioni

La ricerca degli **eventuali punti di discontinuità** va eseguita per i punti di raccordo x=0, x=1.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{senx}{x}=1; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(2x+1)=f(0)=1$$

Nel punto x=0 la funzione è continua.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x+1)=3; \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} e^{2-x}=e$$

Nel punto x=1 la funzione presenta una discontinuità di prima specie con salto negativo

$$\sigma=\lim_{x\to 1^+} f(x)-\lim_{x\to 1^-} f(x)=e-3.$$

Limiti nei punti a ±∞

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{senx}{x}=0; \quad \lim_{x\to +\infty} e^{2-x}=0$$

Altre caratteristiche della funzione

La funzione per x<0 si annulla nei punti x=kπ, con $k\in Z^-$. Il suo diagramma è compreso tra quelli delle due funzioni y=-1/x e y=1/x, avendo in comune con i suddetti i punti di ascisse $x=-\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, con $k\in Z_0^-$.

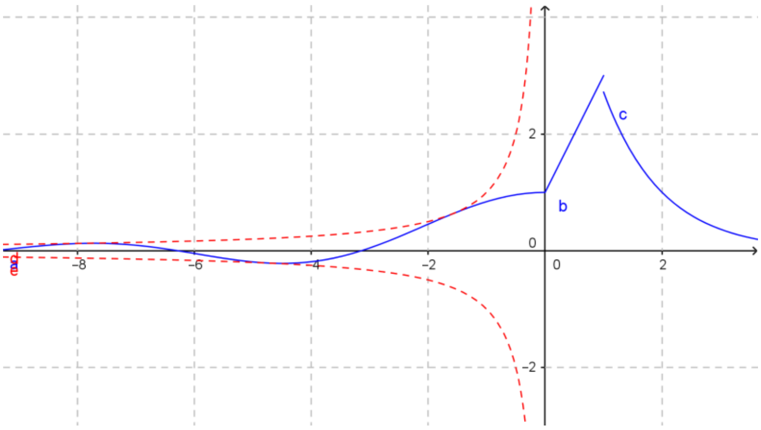

Figura 1

*** ***

2) Per la funzione $f(x)=\begin{cases} \dfrac{senx}{x} & per \quad x<0 \\ 2x+1 & per \quad 0\le x<1 \\ ke^{2-x} & per \quad x\ge 1 \end{cases}$

determinare il valore del parametro k che la rende continua in tutto il suo dominio.

Elaborazioni

Per quanto visto nel precedente esercizio 1) la funzione è continua per x<1. Affinché sia continua in tutto il suo dominio deve essere continua anche per x≥1 e ciò si ottiene imponendo che la stessa sia continua nel punto di raccordo x=1.

Poiché risulta $f(x)=ke$, $\lim\limits_{x\to 1^+} ke^{2-x}=ke=f(1)$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=3$, dovrà essere soddisfatta l'uguaglianza $ke=3$, da cui $k=3/e$. La funzione sarà così definita

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{senx}{x} & per \quad x<0 \\ 2x+1 & per \quad 0\le x<1 \\ \dfrac{3}{e}e^{2-x}=3e^{1-x} & per \quad x\ge 1 \end{cases}$$

Il suo diagramma è in Figura 2.

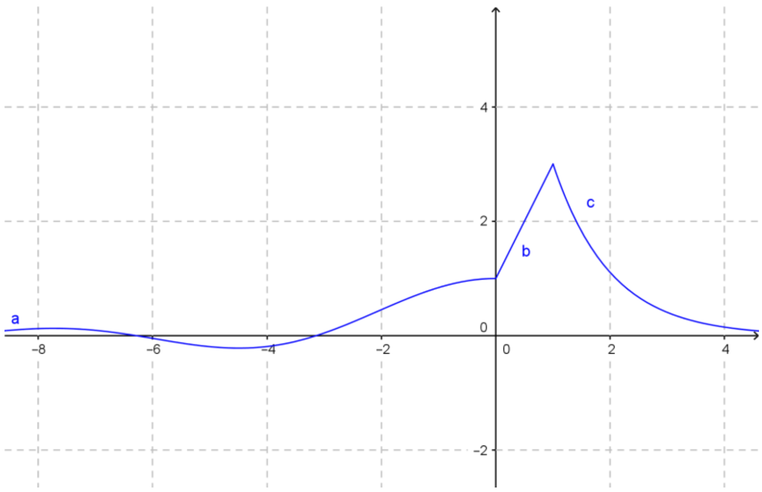

Figura 2

*** ***

3) Data la funzione $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{2x} & per \quad x<0 \\ kx^2+h & per \quad 0\le x\le 1 \\ \log_2\left(\dfrac{3}{2}+kx\right) & per \quad x>1 \end{cases}$

determinare i valori delle costanti k e h che la rendono continua nel dominio di definizione.

Elaborazioni

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}; \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} kx^2+h=h=f(0)$$

La funzione risulta continua in x=0 con h=1/2.

$$\lim_{x\to 1^-}\left(kx^2+\frac{1}{2}\right)=k+\frac{1}{2}=f(1); \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\log_2\left(\frac{3}{2}+kx\right)=\log_2\left(\frac{3}{2}+k\right)$$

La funzione sarà continua nel punto x=1 se risulta $\log_2\left(\frac{3}{2}+k\right)=k+\frac{1}{2}$, quindi se k verifica l'uguaglianza $\frac{3}{2}+k=2^{k+\frac{1}{2}}$. Quest'ultima equazione è soddisfatta dai valori k_1=-1/2 e k_2=1/2.

Esistono dunque due funzioni che hanno le caratteristiche richieste e sono

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{2x} & per \quad x<0\\[2mm] \dfrac{1}{2}\left(-x^2+1\right) & per \quad 0\le x\le 1\\[2mm] \log_2\left(\dfrac{3-x}{2}\right) & per \quad 1<x<3\end{cases}$$

Si osservi che questa funzione è definita nell'intervallo]-∞;3[.

La funzione ha come codominio]-∞;1/2].

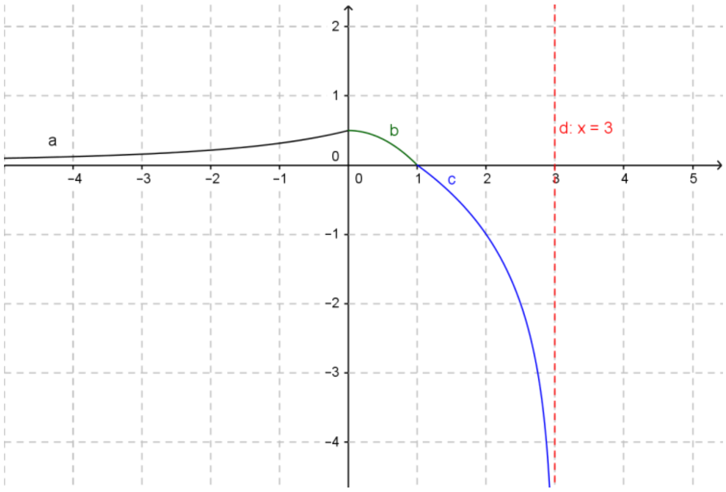

Figura 3- Diagramma della funzione y=f_1(x)

$$f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{2x} & per \quad x<0\\[2mm] \dfrac{1}{2}\left(x^2+1\right) & per \quad 0\le x\le 1\\[2mm] \log_2\left(\dfrac{3+x}{2}\right) & per \quad x>1\end{cases}$$

Questa funzione è definita su tutto l'asse reale ed ha come codominio]0;+∞[.

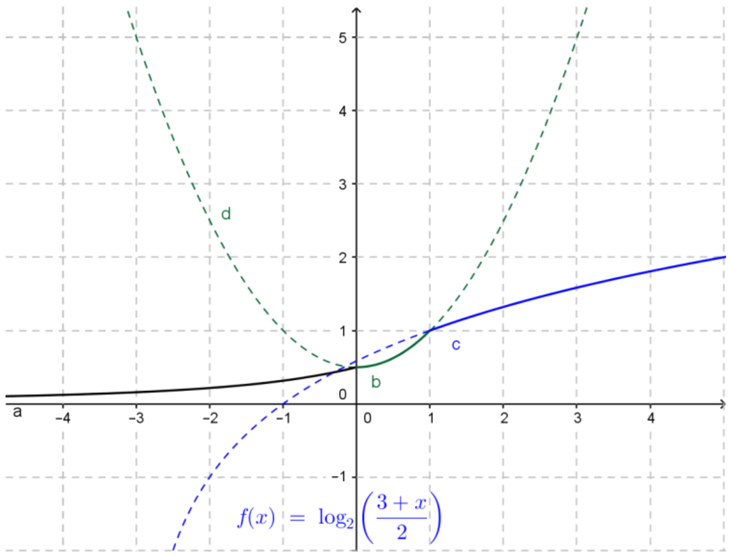

Figura 4- Diagramma della funzione y=f_2(x)