Esercizi sulla continuità di funzioni definite per casi

1) In relazione alla funzione $f(x)=\begin{cases} ke^x & per \quad x\le 0 \\ x^2-x+2 & per \quad x>0 \end{cases}$

determinare il parametro k in modo che la funzione sia continua nel suo dominio, successivamente trovare il codominio.

Elaborazioni

La funzione è definita in tutto R e data la sua struttura è continua in ogni punto x<0 e in ogni punto x>0. Per essere continua in tutto il dominio deve risultare $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

Osserviamo che $f(0)=k$ e che $\lim_{x\to 0^-} f(x)=$ $\lim_{x\to 0^-} ke^x=k$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x^2-x+2\right)=2$.
Per la continuità in x=0 deve risultare k=2. La funzione è dunque così definita

$$f(x)=\begin{cases} 2e^x & per \quad x\le 0 \\ x^2-x+2 & per \quad x>0 \end{cases}.$$

Il diagramma della funzione è riportato in Figura 1 ed è composto da un arco della funzione esponenziale $y=2e^x$ e da un arco della parabola $y=x^2-x+2$.

Il codominio della funzione è l'intervallo]0;+∞[.

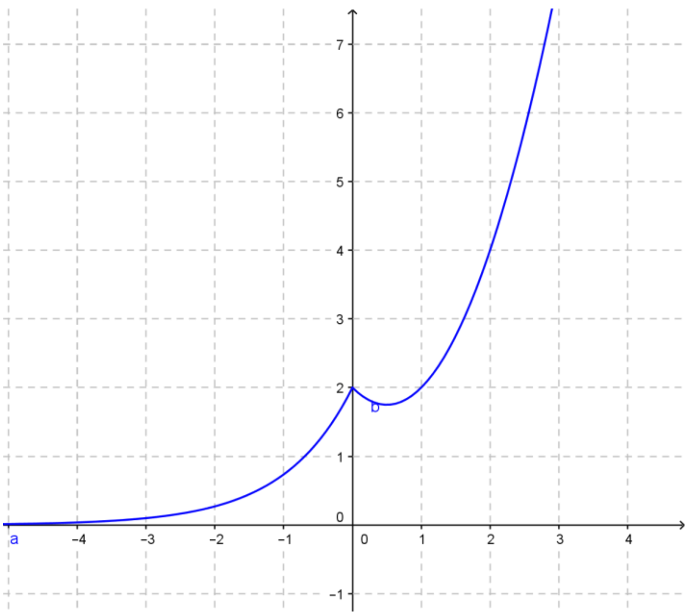

Figura 1

*** ***

2) In relazione alla funzione $f(x)=\begin{cases} e^x & per \quad x<0 \\ ax+b & per \quad 0\le x<1 \\ -x^2-ax-b & per \quad x\ge 1 \end{cases}$

determinare i valori dei parametri a e b in modo che la funzione sia continua in tutto il dominio. Per i valori trovati determinare il codominio. Discutere le soluzioni dell'equazione $f(x)=k$, con $k\in R$.

Elaborazioni

Affinché la funzione sia continua in tutto il suo dominio di definizione devono verificarsi le seguenti condizioni:

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^x=1=f(0)=b$;

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(ax+b) = a+b = f(1) = -1-a-b$$

Si deduce che deve risultare $a=-\frac{3}{2}$, $b=1$. La funzione è così definita

$$f(x)=\begin{cases} e^x & per & x<0 \\ -\frac{3}{2}x+1 & per & 0\le x<1 \\ -x^2+\frac{3}{2}x-1 & per & x\ge 1 \end{cases}$$

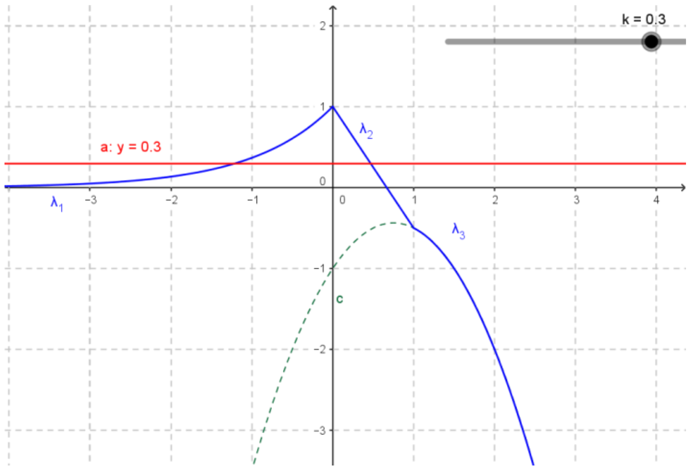

Figura 2

Diagramma della funzione e codominio

Il diagramma della funzione è in Figura 2 ed è composto

- da un arco della funzione esponenziale $y=e^x$ che si estende da -∞ fino al punto (0;1),
- dal segmento avente per estremi i punti (0;1), (1;-1/2),
- dall'arco della parabola di equazione $y=-x^2+\frac{3}{2}x-1$ che parte dal punto (1;-1/2) e si estende verso -∞.

Il codominio della funzione è l'intervallo]-∞;1].

Discussione dell'equazione $f(x)=k$, con $k\in R$

In Figura 2 è rappresentata la retta a:y=k per il particolare valore di k=0.3. L'equazione in oggetto ammette soluzioni quando la retta y=k incontra il diagramma della curva; le soluzioni dell'equazione sono le ascisse dei punti comuni alla retta e al diagramma della funzione. Sussistono i seguenti casi:

per k>1 l'equazione non ha soluzioni;

per k=1 l'equazione ammette una sola soluzione ed è x=0;

per 0<k<1 l'equazione ammette due soluzioni x_1, x_2, delle quali $x_1<0$, $0<x_2<2/3$;

per k=0 l'equazione ammette la sola soluzione x=2/3;

per k<0 l'equazione ammette una sola soluzione negativa.