

Sulle funzioni lipschitziane

Sia $f : A \rightarrow R$, con $A \subseteq R$, una qualsiasi funzione reale di variabile reale. Sussistono le seguenti definizioni.

Definizione_1

La funzione f si dice lipschitziana nel dominio A , se esiste un numero positivo L , detto numero di Lipschitz⁽¹⁾, tale che comunque si scelgano in A i due punti x', x'' sussista la seguente disuguaglianza

$$|f(x'') - f(x')| \leq L \cdot |x'' - x'|$$

Definizione_2

La funzione f si dice bilipschitziana nel dominio A , se esiste un numero positivo $L \geq 1$, detto numero di Lipschitz, tale che comunque si scelgano in A i due punti x', x'' sussista la seguente doppia disuguaglianza

$$\frac{1}{L} \cdot |x'' - x'| \leq |f(x'') - f(x')| \leq L \cdot |x'' - x'|$$

Nota

La lipschitzianità di una funzione è una proprietà che si sfrutta nello studio delle equazioni differenziali ordinarie; infatti rientra nelle ipotesi del Teorema di esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy.

Osservazione

Se una funzione è lipschitziana nell'insieme A allora è anche continua; anzi, se f è lipschitziana in A allora è uniformemente continua.

Ricordiamo che se $x_0 \in A$ allora

la funzione $f : A \rightarrow R$ è continua in x_0 se $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $\forall x \in A$, se $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ allora risulta $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Ancora, la funzione $f : A \rightarrow R$ è **uniformemente continua in A**, se $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che comunque si scelgano x', x'' in A verificanti la condizione $|x' - x''| < \delta_\varepsilon$ allora risulta anche $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Infine, una funzione $f : A \rightarrow R$ è **continua in A secondo Lipschitz** se esiste $L > 0$ tale che $\forall x \in A$ e $\forall \varepsilon > 0$, se $x + \frac{\varepsilon}{L} \in A$ allora si verifica $\left| f(x) - f\left(x + \frac{\varepsilon}{L}\right) \right| < \varepsilon$.

Se una funzione è continua in $A \subseteq R$ secondo Lipschitz allora nello stesso insieme è uniformemente continua e a maggior ragione anche continua.

⁽¹⁾ Rudolph Otto Sigismund Lipschitz, matematico tedesco, nato a Königsberg il 14-05-1832 e morto a Bonn il 7-10-1903. Si è occupato di Teoria dei numeri, delle Funzioni di Bessel, delle Serie di Fourier, del Calcolo delle Variazioni e delle Equazioni differenziali.

Per riconoscere la lipschitzianità di una funzione $f:[a;b] \rightarrow R$, con $[a;b] \subseteq R$, si può ricorrere al seguente

Teorema (criterio) per la lipschitzianità

Se la funzione $f:[a;b] \rightarrow R$ è derivabile in $]a;b[$ e la funzione derivata prima $f'(x)$ è limitata allora la funzione f è lipschitziana in $[a;b]$.

Dimostrazione

Poiché la funzione derivata prima è limitata in $]a;b[$ sappiamo che esiste un numero $k>0$ che verifica la disuguaglianza

$$|f'(x)| \leq k, \quad \forall x \in]a;b[\quad (1)$$

Siano x', x'' due punti di $[a;b]$, con $x' < x''$. La funzione f nell'intervallo $[x'; x'']$ verifica le ipotesi del teorema di Lagrange, quindi esiste almeno un punto x^* , con $x' < x^* < x''$, che verifica l'uguaglianza

$$\frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} = f'(x^*) \text{ e quindi anche } \frac{|f(x'') - f(x')|}{|x'' - x'|} = |f'(x^*)|.$$

Dalla (1) si ricava

$$\frac{|f(x'') - f(x')|}{|x'' - x'|} = |f'(x^*)| \leq k, \text{ da cui}$$

$$|f(x'') - f(x')| \leq k \cdot |x'' - x'| \quad (2)$$

Dalla (2), preso come numero di Lipschitz $L=k$, si riconosce immediatamente che la funzione $f:[a;b] \rightarrow R$ è lipschitziana in $[a;b]$. C.V.D.

Esercizi sulle funzioni lipschitziane

Es1) Riconoscere che la funzione $f(x) = x^2 - 3x$ è lipschitziana in $[1;3]$.

Soluzione

Osserviamo che la funzione in esame è definita su tutto l'asse reale ed è ivi derivabile; la funzione derivata prima è $f'(x) = 2x - 3$.

La funzione $f'(x)$ nell'intervallo $[1;3]$ è limitata assumendo il suo minimo assoluto in $x=1$, che vale $\min=-1$, ed il massimo assoluto in $x=3$ che vale $\max = f'(3) = 3$; per ogni x dell'intervallo risulta $-1 \leq f'(x) \leq 3$ da cui $|f'(x)| \leq 3$.

Per provare che f è lipschitziana in $[1;3]$ dimostriamo che possiamo assumere come numero di Lipschitz il valore $L=3$.

Infatti, la funzione in esame nell'intervallo $[1;3]$ verifica le ipotesi del teorema di Lagrange, quindi con x' , x'' punti distinti di detto intervallo sappiamo che esiste almeno un punto c interno all'intervallo di estremi x' , x'' che verifica l'uguaglianza

$$\frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} = f'(c), \text{ da cui } \left| \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} \right| = |f'(c)| \leq 3, \text{ quindi}$$

$$|f(x'') - f(x')| \leq 3 \cdot |x'' - x'|$$

La disuguaglianza ottenuta è quella richiesta per la lipschitzianità della funzione.

Es2) Dimostrare che la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è lipschitziana nell'intervallo $[1;4]$.

Soluzione

La funzione in oggetto è continua e derivabile nell'intervallo assegnato e la funzione derivata prima è

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}. \text{ Riconosciamo immediatamente che internamente all'intervallo la derivata prima è}$$

strettamente crescente; infatti

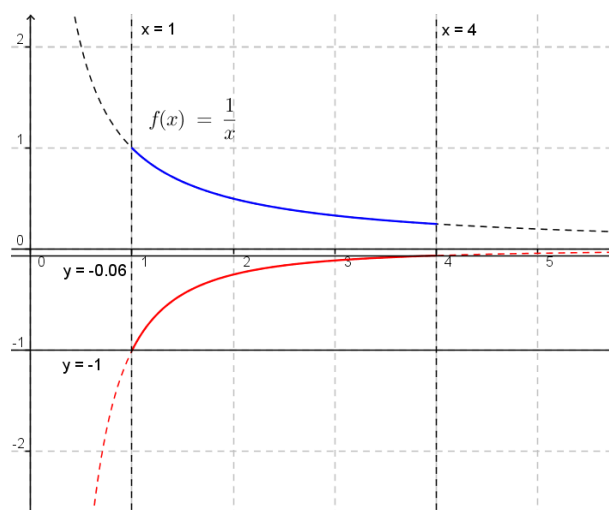
$$1 < x < 4 \Rightarrow 1 < x^2 < 4^2 \Rightarrow \frac{1}{4^2} < \frac{1}{x^2} < 1 \Rightarrow$$

$$-1 < -\frac{1}{x^2} < -\frac{1}{16}, \text{ quindi}$$

$f'(1) < f'(x) < f'(4)$. Possiamo evidentemente scrivere che

$$\forall x \in [1;4] \text{ risulta } |f'(x)| \leq 1,$$

dunque la funzione derivata prima è limitata nell'intervallo e quindi per il teorema riportato sopra la funzione è lipschitziana. Come numero L di Lipschitz possiamo assumere $L=1$.



Es3) Provare che le funzioni $\sin x$, $\cos x$ sono lipschitziane in $\mathbb{R}$ con numero di Lipschitz $L=1$.

Soluzione

Si potrebbe osservare che entrambe le funzioni hanno le rispettive funzioni derivate prime limitate ed invocare il **Teorema (criterio) per la lipschitzianità**. Infatti $D(\sin x) = \cos x$, $D(\cos x) = -\sin x$ e risulta $|\cos x| \leq 1$, $|\sin x| \leq 1$. Possiamo però provare la lipschitzianità delle due funzioni in modo diverso utilizzando note formule goniometriche.

Ricordiamo che sussistono le seguenti formule (dette di prostaferesi)

$$\operatorname{sen} x'' - \operatorname{sen} x' = 2 \cos\left(\frac{x'' + x'}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x'' - x'}{2}\right), \quad (*)$$

$$\cos x'' - \cos x' = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{x'' + x'}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x'' - x'}{2}\right), \quad (**)$$

per ogni coppia di valori x', x'' reali, misure di angoli espresse in radianti. Pertanto si ha anche

$$|\operatorname{sen} x'' - \operatorname{sen} x'| = 2 \left| \cos\left(\frac{x'' + x'}{2}\right) \right| \left| \operatorname{sen}\left(\frac{x'' - x'}{2}\right) \right| \leq 2 \cdot 1 \cdot \left| \operatorname{sen}\left(\frac{x'' - x'}{2}\right) \right|$$

Osserviamo ora che per ogni x reale, misura in radianti dell'angolo, risulta $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ e quindi possiamo scrivere

$$|\operatorname{sen} x'' - \operatorname{sen} x'| \leq 2 \cdot 1 \cdot \left| \operatorname{sen}\left(\frac{x'' - x'}{2}\right) \right| \leq 2 \cdot 1 \cdot \left| \frac{x'' - x'}{2} \right| = |x'' - x'|$$

In definitiva, per ogni coppia x', x'' risulta vera la disuguaglianza

$$|\operatorname{sen} x'' - \operatorname{sen} x'| \leq 1 \cdot |x'' - x'|,$$

quindi la funzione è lipschitziana con numero di Lipschitz **L=1**

Analoga dimostrazione si può sviluppare per provare la lipschitzianità della funzione $\cos x$ partendo dalla formula (**).

