

Sulle funzioni lipschitziane

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$, una qualsiasi funzione reale di variabile reale. Sussistono le seguenti definizioni.

Definizione_1

La funzione f si dice lipschitziana nel dominio A , se esiste un numero positivo L , detto numero di Lipschitz⁽¹⁾, tale che comunque si scelgano in A i due punti x', x'' sussista la seguente disuguaglianza

$$|f(x'') - f(x')| \leq L \cdot |x'' - x'|$$

Definizione_2

La funzione f si dice bilipschitziana nel dominio A , se esiste un numero positivo $L \geq 1$, detto numero di Lipschitz, tale che comunque si scelgano in A i due punti x', x'' sussista la seguente doppia disuguaglianza

$$\frac{1}{L} \cdot |x'' - x'| \leq |f(x'') - f(x')| \leq L \cdot |x'' - x'|$$

Nota

La lipschitzianità di una funzione è una proprietà che si sfrutta nello studio delle equazioni differenziali ordinarie; infatti rientra nelle ipotesi del Teorema di esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy.

Osservazione

Se una funzione è lipschitziana nell'insieme A allora è anche continua; anzi, se f è lipschitziana in A allora è uniformemente continua.

Ricordiamo che se $x_0 \in A$ allora

la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in x_0 se $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $\forall x \in A$, se $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ allora risulta $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Ancora, la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è **uniformemente continua in A**, se $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che comunque si scelgano x', x'' in A verificanti la condizione $|x' - x''| < \delta_\varepsilon$ allora risulta anche $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Infine, una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è **continua in A secondo Lipschitz** se esiste $L > 0$ tale che $\forall x \in A$ e $\forall \varepsilon > 0$, se $x + \frac{\varepsilon}{L} \in A$ allora si verifica $\left| f(x) - f\left(x + \frac{\varepsilon}{L}\right) \right| < \varepsilon$.

Se una funzione è continua in $A \subseteq \mathbb{R}$ secondo Lipschitz allora nello stesso insieme è uniformemente continua e a maggior ragione anche continua.

⁽¹⁾ Rudolph Otto Sigismund Lipschitz, matematico tedesco, nato a Königsberg il 14-05-1832 e morto a Bonn il 7-10-1903. Si è occupato di Teoria dei numeri, delle Funzioni di Bessel, delle Serie di Fourier, del Calcolo delle Variazioni e delle Equazioni differenziali.

Per riconoscere la lipschitzianità di una funzione $f:[a;b] \rightarrow R$, con $[a;b] \subseteq R$, si può ricorrere al seguente

Teorema (criterio) per la lipschitzianità

Se la funzione $f:[a;b] \rightarrow R$ è derivabile in $]a;b[$ e la funzione derivata prima $f'(x)$ è limitata allora la funzione f è lipschitziana in $[a;b]$.

Dimostrazione

Poiché la funzione derivata prima è limitata in $]a;b[$ sappiamo che esiste un numero $k>0$ che verifica la disuguaglianza

$$|f'(x)| \leq k, \quad \forall x \in]a;b[\quad (1)$$

Siano x', x'' due punti di $[a;b]$, con $x' < x''$. La funzione f nell'intervallo $[x'; x'']$ verifica le ipotesi del teorema di Lagrange, quindi esiste almeno un punto x^* , con $x' < x^* < x''$, che verifica l'uguaglianza

$$\frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} = f'(x^*) \text{ e quindi anche } \frac{|f(x'') - f(x')|}{|x'' - x'|} = |f'(x^*)|.$$

Dalla (1) si ricava

$$\frac{|f(x'') - f(x')|}{|x'' - x'|} = |f'(x^*)| \leq k, \text{ da cui}$$

$$|f(x'') - f(x')| \leq k \cdot |x'' - x'| \quad (2)$$

Dalla (2), preso come numero di Lipschitz $L=k$, si riconosce immediatamente che la funzione $f:[a;b] \rightarrow R$ è lipschitziana in $[a;b]$. C.V.D.