Funzione definita per casi

In relazione alla funzione reale di variabile reale così definita

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & per \quad 0\le x<1 \\ (x-1)^2 & per \quad 1\le x\le 3 \end{cases}$$

a) Precisare se è continua nel suo dominio; in caso negativo indicare i punti di discontinuità e il tipo di discontinuità.
b) Determinare il codominio della funzione.
c) Rappresentare il diagramma della funzione.
d) Precisare se la funzione è invertibile in ciascuno degli intervalli [0;1[, [1;3] ed in caso affermativo trovare le rispettive funzioni inverse.

Elaborazioni

a) La funzione presenta nel punto x=1 una discontinuità di prima specie; infatti esistono i limiti laterali per x→1, sono finiti ma diversi tra loro:

$$\lim_{x\to 1^-}(2x-1)=1, \quad \lim_{x\to 1^+}(x-1)^2=0=f(1)$$

In particolare, la funzione è continua a destra nel punto x=1. Nello stesso punto la funzione presenta un salto il cui valore è

$$s=f(1)-\lim_{x\to 1^-}(2x-1)=-1.$$

b) L'insieme delle immagini della funzione con 0≤x<1 è l'intervallo [-1;1[. L'insieme delle immagini descritto con 1≤x≤3 è l'intervallo [0;4]. Si conclude che il codominio della funzione è l'insieme

Codom(f)=[-1;1[∪[0;4]= [-1;4]

c) Il diagramma della funzione è in Figura 1
d) Invertibilità in [0;1[

La restrizione f_1 della funzione all'intervallo considerato così definita

$f_1 : x\in[0;1[\to[-1;1[$, con

$f_1(x)=2x-1$

è invertibile e posto $f_1(x)=y$, la funzione inversa è

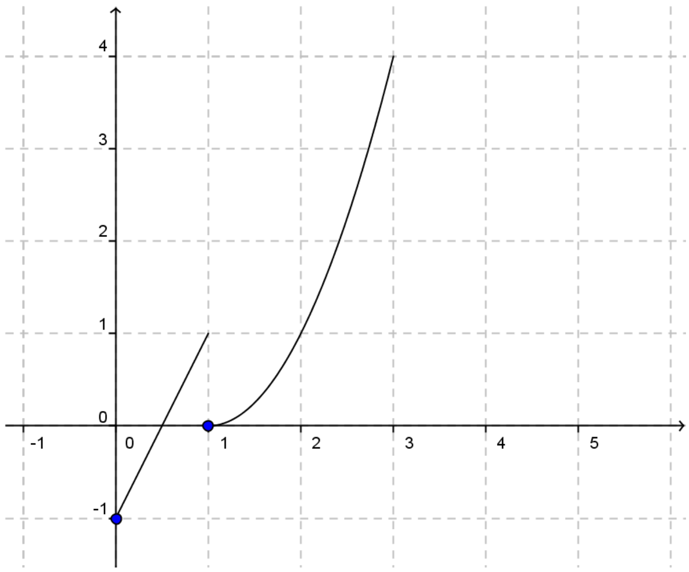

Figura 1- La funzione non è continua nel punto x=1, dove presenta una discontinuità di prima specie.

$x = f_1^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}$, il cui dominio è l'intervallo [-1;1[e il cui codominio l'intervallo [0;1[.

Invertibilità in [1;3]

La restrizione f_2 della funzione all'intervallo considerato così definita

$f_2 : x \in [1;3] \to [0;4]$, con $f_2(x) = (x-1)^2$

è invertibile e posto $f_2(x) = y$, la funzione inversa è $x = f_2^{-1}(y) = \sqrt{y} + 1$, il cui dominio è l'intervallo [0;4] e il codominio l'intervallo [1;3].

*** ***