Calcolo di derivate con il limite del rapporto incrementale

Premessa

Ricordiamo che assegnata la funzione reale di variabile reale $f: A \to R$, con $A \subseteq R$, se x_0 è un punto del dominio e di accumulazione per esso, in simboli $x_0 \in A \wedge x_0 \in D_r(A)$, si dice che la funzione *f* è derivabile in x_0 se e solo se esiste ed è finito il valore del limite del rapporto incrementale

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

per $x \to x_0$. Se x_0 il punto è di accumulazione solo a sinistra o solo a destra, il limite del rapporto andrà studiato solo da quel lato. Il limite del rapporto incrementale è

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \qquad (1)$$

Il limite del rapporto incrementale si può porre anche in una delle seguenti forme equivalenti:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (2)$$

La scelta di una delle tre forme del rapporto incrementale è ininfluente ai fini del risultato; tuttavia, a livello di calcolo algebrico, le difficoltà che si incontrano con una forma possono essere più complesse di quelle incontrate con le altre. L'esperienza suggerirà la scelta da adottare.

Esercizi svolti

Applicando la definizione di derivata, determinare il valore della derivata prima delle funzioni di seguito indicate, ciascuna nel punto x_0 assegnato.

a)

$f(x) = x^2 - 2x$ nel punto x_0=1 R.: $f'(1) = 0$.

b)

$f(x) = \sqrt{x-2}$, nel punto $x_0 = 3$ R.: $f'(3) = \frac{1}{2}$.

c)

$f(x) = \frac{x^2}{x-5}$, nel punto $x_0 = -1$ R.: $f'(-1) = \frac{11}{36}$

d)

Calcolare la derivata prima della funzione $f(x) = \frac{x^2}{x-5}$ nel generico punto x_0 del suo dominio che è $R - \{5\}$. R.: $f'(x_0) = \frac{x_0^2 - 10x_0}{(x_0 - 5)^2}$

e)

$f(x) = (x-1)\sqrt{x+1}$, nei punti $x_0 = -1$, $x_1 = 1$.

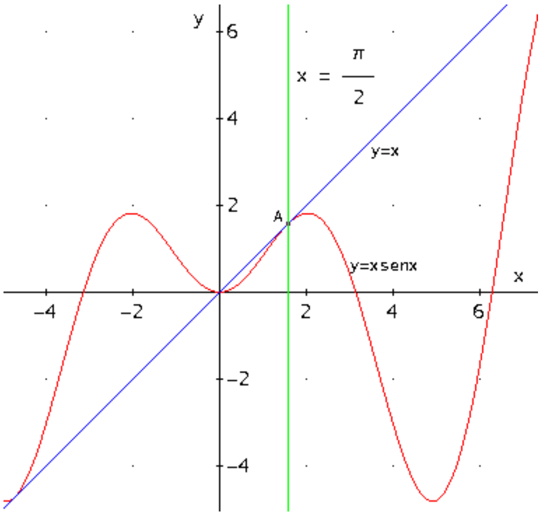
R.: La funzione non è derivabile nel punto *x*=-1, mentre $f'(1) = \sqrt{2}$

.

f)

Determinare il valore della derivata prima della funzione $f(x)=xsenx$ nel punto $x_0=\frac{\pi}{2}$ e l'equazione della retta tangente al diagramma nel punto $(x_0;f(x_0))$.

R.: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, la retta tangente in $A\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ è $y=x$.



g)

Determinare la derivata prima della funzione $f(x)=xsenx$ nel generico punto x_0.

R.: $f'(x_0)=senx_0+x_0\cos x_0$.

h)

Per la funzione $f(x)=xe^x$, calcolare la derivata prima nel generico punto x_0 e successivamente nel punto $x_0=-1$.

R.: $f'(x_0)=x_0e^{x_0}+e^{x_0}$; $f'(-1)=0$