Calcolo di derivate con il limite del rapporto incrementale

Premessa

Ricordiamo che assegnata la funzione reale di variabile reale $f: A \to R$, con $A \subseteq R$, se x_0 è un punto del dominio e di accumulazione per esso, in simboli $x_0 \in A \wedge x_0 \in D_r(A)$, si dice che la funzione *f* è derivabile in x_0 se e solo se esiste ed è finito il valore del limite del rapporto incrementale

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

per $x \to x_0$. Se x_0 il punto è di accumulazione solo a sinistra o solo a destra, il limite del rapporto andrà studiato solo da quel lato. Il limite del rapporto incrementale è

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \;. \qquad (1)$$

Il limite del rapporto incrementale si può porre anche in una delle seguenti forme equivalenti:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (2)$$

La scelta di una delle tre forme del rapporto incrementale è ininfluente ai fini del risultato; tuttavia, a livello di calcolo algebrico, le difficoltà che si incontrano con una forma possono essere più complesse di quelle incontrate con le altre. L'esperienza suggerirà la scelta da adottare. Nel seguito vedremo alcuni esempi affrontati con modalità diverse.

Esercizi svolti

Applicando la definizione di derivata, determinare il valore della derivata prima delle funzioni di seguito indicate, ciascuna nel punto x_o assegnato.

a)

$f(x) = x^2 - 2x$ nel punto $x_o=1$

Si deve studiare il seguente limite

$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$, essendo $f(1+h) = (1+h)^2 - 2(1+h) = h^2 - 1$; $f(1) = -1$. Si ha:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 1 - (-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} h = 0$$

Concludiamo che la funzione è derivabile nel punto e risulta $f'(1) = 0$.

b)

$f(x) = \sqrt{x-2}$, nel punto $x_0 = 3$

Risulta *f*(3)=1. Riportiamo di seguito i passaggi per lo studio del limite del rapporto incrementale.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h+1} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h+1} - 1}{h} \cdot \frac{\sqrt{h+1} + 1}{\sqrt{h+1} + 1} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{h+1}\right)^2 - 1}{h\left(\sqrt{h+1} + 1\right)} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{h+1} + 1\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h+1} + 1} = \frac{1}{2}$$

Concludiamo che la funzione è derivabile nel punto $x_0 = 3$ e risulta $f'(3) = \frac{1}{2}$.

c)

$f(x)=\frac{x^2}{x-5}$, nel punto $x_0=-1$

Risulta $f(-1)=-\frac{1}{6}$. Il limite del rapporto incrementale è

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{(-1+h)^2}{-1+h-5}-\left(-\frac{1}{6}\right)\right]=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1-2h+h^2}{h-6}+\frac{1}{6}\right]=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{6\left(1-2h+h^2\right)+h-6}{6(h-6)}\right]=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cancel{h}}\cdot\frac{\cancel{h}(6h-11)}{6(h-6)}=\frac{11}{36}$$

La funzione è derivabile nel punto e la derivata prima è

$$f'(-1)=\frac{11}{36}$$

d)

Calcoliamo la derivata prima della funzione $f(x)=\frac{x^2}{x-5}$ nel generico punto x_0 del suo dominio che è $R-\{5\}$.

Per questo esercizio studiamo il limite del rapporto incrementale utilizzando i due modelli (1) e (2), in particolare il primo dei due indicati nella (2), al fine di mettere in risalto le difficoltà di calcolo che si possono incontrare legate al tipo di modello utilizzato. Infatti, la scelta del modello utilizzato sarà ininfluente ai fini del risultato, ma, come sarà evidente, determina la natura dei calcoli necessari.

Primo metodo

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\left[\frac{x^2}{x-5}-\frac{x_0^{\,2}}{x_0-5}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\cdot\frac{(x_0-5)x^2-x_0^{\,2}x+5x_0^{\,2}}{(x-5)(x_0-5)}$$

Osserviamo che il polinomio al numeratore si annulla per $x = x_0$ e dunque[1] è divisibile per il binomio $x-x_0$. Eseguendo la divisione $\left[(x_0-5)x^2-x_0^{\,2}x+5x_0^{\,2}\right]:(x-x_0)$ si riscontra che il quoziente è $Q(x)=(x_0-5)x-5x_0$, il resto R=0 e dunque il polinomio dividendo si fattorizza nella forma seguente:

$$(x_0-5)x^2-x_0^{\,2}x+5x_0^{\,2}=\left[(x_0-5)x-5x_0\right](x-x_0)$$

Possiamo procedere con il calcolo del limite.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\cdot\frac{(x_0-5)x^2-x_0^{\,2}x+5x_0^{\,2}}{(x-5)(x_0-5)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\left[(x_0-5)x-5x_0\right]\cancel{(x-x_0)}}{\cancel{(x-x_0)}(x-5)(x_0-5)}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x_0-5)x-5x_0}{(x-5)(x_0-5)}=$$

$$\frac{x_0^{\,2}-10x_0}{(x_0-5)^2}$$

Possiamo concludere che la derivata prima della funzione in esame nel generico punto x_0 del suo dominio è

[1] Ricordiamo che sussiste il seguente enunciato, noto come Teorema del resto, “Se il polinomio P(x) si annulla nel punto x=α allora lo stesso è divisibile per il binomio (x-α)”. Se si esegue la divisione P(x): (x-α) si ottiene il polinomio quoziente Q(x) e come resto R=0 e risulta: P(x)= (x-α)·Q(x).

$$f'(x_0)=\frac{x_0^{\,2}-10x_0}{(x_0-5)^2}.$$
Prima di passare a presentare il secondo metodo per lo studio del limite del rapporto incrementale, cogliamo l'occasione per far notare che sfruttando l'espressione della derivata prima nel generico punto x_0 del dominio di derivabilità della funzione possiamo riscontrare che per $x_0 = -1$ si ricava agevolmente il valore f' (-1), già calcolato nel precedente esercizio. Infatti:
$$f'(-1)=\frac{(-1)^2-10(-1)}{(-1-5)^2}=\frac{11}{36}$$

Secondo metodo

Utilizziamo dunque il modello (2) per il limite del rapporto incrementale.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left[\frac{(x_0+h)^2}{x_0+h-5}-\frac{x_0^{\,2}}{x_0-5}\right]=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot\frac{(x_0-5)(x_0+h)^2-x_0^{\,2}(x_0+h-5)}{(x_0+h-5)(x_0-5)}=$$
$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot\frac{(x_0-5)\left(x_0^{\,2}+2hx_0+h^2\right)-x_0^{\,2}(x_0+h-5)}{(x_0+h-5)(x_0-5)}=$$
$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot\frac{\cancel{x_0^{\,2}(x_0-5)}+(x_0-5)\left(2hx_0+h^2\right)-\cancel{x_0^{\,2}(x_0-5)}-x_0^{\,2}h}{(x_0+h-5)(x_0-5)}=\lim_{h\to0}\frac{1}{\cancel{h}}\cdot\frac{\cancel{h}\left[(x_0-5)(2x_0+h)-x_0^{\,2}\right]}{(x_0+h-5)(x_0-5)}=$$
$$\lim_{h\to0}\frac{(x_0-5)(2x_0+h)-x_0^{\,2}}{(x_0+h-5)(x_0-5)}=\frac{2x_0^{\,2}-10x_0-x_0^{\,2}}{(x_0-5)^2}=\frac{x_0^{\,2}-10x_0}{(x_0-5)^2}$$
Come si vede il risultato ottenuto è identico a quello ottenuto con il metodo precedente.

e)

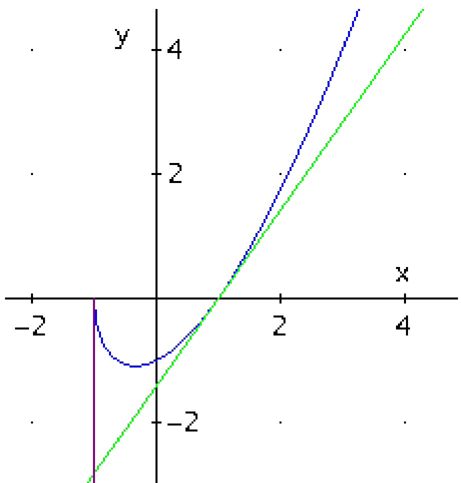
$f(x)=(x-1)\sqrt{x+1}$, nei punti $x_0=-1$, $x_1=1$.

Studiamo il limite del rapporto incrementale nel punto $x_0=-1$.

Osserviamo che la funzione in esame è definita nell'intervallo [-1;+∞[, perciò il punto $x_0=-1$è di accumulazione solo a destra; il limite del rapporto incrementale va studiato solo per $x\to-1^+$.
Notato che $f(-1)=0$ si ha:
$$\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1^+}\frac{(x-1)\sqrt{x+1}}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{(x-1)}{\sqrt{x+1}}=\frac{-2}{0^+}=-2\cdot(+\infty)=-\infty$$

Conclusione

La funzione non è derivabile nel punto x=-1. Possiamo aggiungere che la semitangente destra al diagramma della funzione è parallela all'asse delle ordinate.



Es. e)

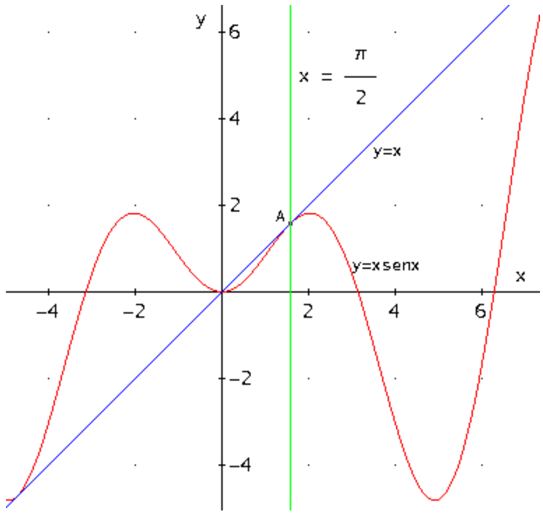
Studio del limite del rapporto incrementale nel punto $x_0=1$

Osserviamo preliminarmente che $f(1)=0$. Si ha:
$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}\sqrt{x+1}}{\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to1}\sqrt{x+1}=\sqrt{2}$$
Avendo ottenuto un valore finito concludiamo che la funzione è derivabile nel punto considerato e risulta $f'(1)=\sqrt{2}$.

Nella figura a lato sono rappresentati parzialmente il diagramma della funzione, la semitangente nel punto x = -1 e la tangente nel punto x = 1.

f)

Determinare il valore della derivata prima della funzione $f(x)=xsenx$, nel punto $x_0=\frac{\pi}{2}$ e l'equazione della retta tangente al diagramma nel punto (x_0;$f(x_0)$).



$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left[\left(\frac{\pi}{2}+h\right)sen\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-\frac{\pi}{2}\right]=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left(\left(\frac{\pi}{2}+h\right)\cdot\cos h-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\cos h}{\cancel{h}}=\frac{\pi}{2}\cdot 0+\cos 0=1$$

Si osservi che nel calcolo si è tenuto presente il limite notevole $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0$.

Concludiamo che la funzione in esame nel punto indicato è derivabile e la derivata prima vale uno.

Poiché $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$, la retta tangente in $A\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ è la bisettrice del primo e terzo quadrante: y=x.

g)

Determiniamo la derivata prima della funzione dell'esercizio precedente nel generico punto x_0.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)sen(x_0+h)-x_0senx_0}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)(senx_0\cos h+\cos x_0 senh)-x_0senx_0}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)senx_0\cos h+(x_0+h)\cos x_0 senh-x_0senx_0}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{hsenx_0\cos h}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)\cos x_0 senh}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{x_0senx_0(\cos h-1)}{h}=$$

$$senx_0+x_0\cos x_0+x_0senx_0\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=senx_0+x_0\cos x_0+0=senx_0+x_0\cos x_0$$

Concludiamo che la derivata prima della funzione nel generico punto x_0 è:

$f'(x_0)=senx_0+x_0\cos x_0$.

h)

Per la funzione $f(x)=xe^x$, calcolare la derivata prima nel generico punto x_0 e successivamente nel punto $x_0=-1$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(x_0+h\right)e^{x_0+h}-x_0e^{x_0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x_0e^{x_0+h}+he^{x_0+h}-x_0e^{x_0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x_0e^{x_0}e^h-x_0e^{x_0}}{h}+$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}e^{x_0+h}}{\cancel{h}}=x_0e^{x_0}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\left(e^h-1\right)}{h}+e^{x_0}=x_0e^{x_0}+e^{x_0}$$

Concludiamo che la derivata prima richiesta è

$f'(x_0)=x_0e^{x_0}+e^{x_0}$

Nel caso specifico, con $x_0=-1$ si ha: $f'(-1)=-1e^{-1}+e^{-1}=0$