Esercitazione sui punti di singolarità e i punti angolosi di quattro funzioni

Es1) La funzione $f(x)=-\sqrt[3]{x^2}$ è definita su tutto l'asse reale. Se la scriviamo nella seguente forma

$f(x)=-x^{\frac{2}{3}}$ possiamo calcolare l'espressione della funzione derivata prima applicando la regola della potenza come segue.

$f'(x)=-\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}-1}==-\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. La funzione derivata prima esiste per ogni $x\neq0$.

Nel punto x=0, dove la funzione di partenza è definita ed è continua, per stabilire il tipo di punto si devono studiare i limiti laterali destro e sinistro del rapporto incrementale, oppure si studiano direttamente i limiti laterali nello stesso punto della funzione derivata prima ed in base ai risultati ottenuti si classifica il punto. Procediamo.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\sqrt[3]{x^2}-0}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x^{\frac{2}{3}}}{x}=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{1}{x^{1-\frac{2}{3}}}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)=$$
$$-\frac{1}{\sqrt[3]{0^+}}=-1\cdot(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\sqrt[3]{x^2}-0}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x^{\frac{2}{3}}}{x}=\lim_{x\to0^-}\left(-\frac{1}{x^{1-\frac{2}{3}}}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(-\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)=$$
$$-\frac{1}{\sqrt[3]{0^-}}=-1\cdot(-\infty)=+\infty$$

Facciamo vedere che studiando i limiti laterali della funzione derivata prima nello stesso punto i risultati che si hanno sono gli stessi.

$$\lim_{x\to0^+}f'(x)=\lim_{x\to0^+}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=-\frac{2}{3\sqrt[3]{0^+}}=-2\cdot(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^-}f'(x)=\lim_{x\to0^-}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=-\frac{2}{3\sqrt[3]{0^-}}=-2\cdot(-\infty)=+\infty$$

Poiché i valori dei due limiti laterali del rapporto incrementale ottenuti sono diversi ed infiniti, si conclude che nel punto del grafico (0;f(0))=(0;0) vi è una cuspide con la punta rivolta vero l'alto. Si può anche affermare che le semitangenti destra e sinistra al grafico della funzione in detto punto coincidono con il semiasse negativo delle ordinate.

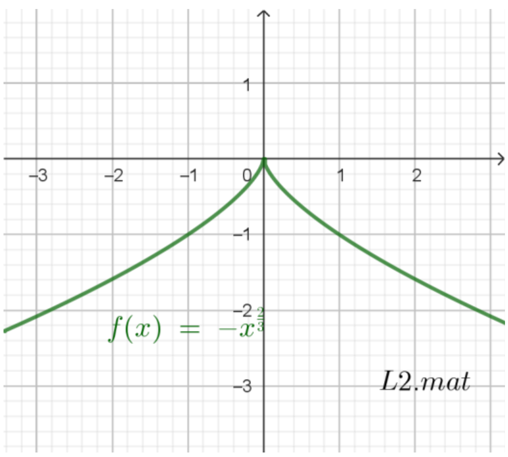

Figura 1-Punto cuspidale rivolto verso l'alto

Es2) $g(x)=\sqrt[3]{x^2}+2x$

La funzione in oggetto è la somma di due funzioni, della quali la prima irrazionale intera e la seconda un polinomio di primo grado. E' definita in tutto R. Determiniamo l'espressione della funzione derivata prima.

$$g(x)=x^{\frac{2}{3}}+2x \rightarrow g'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}+2\cdot 1=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+2=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+2$$

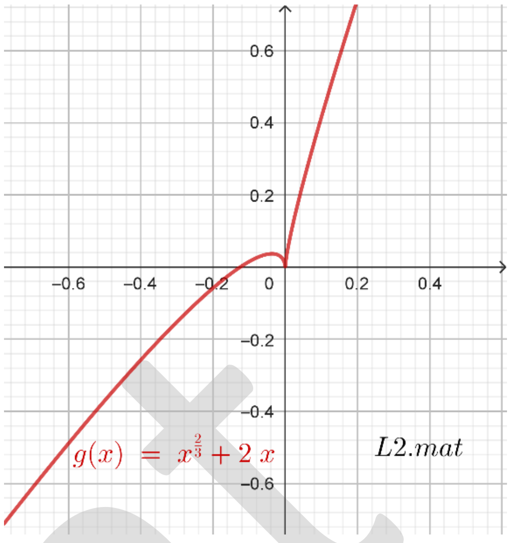

Figura 2-Nel punto (0;0) vi è una cuspide rivolta verso il basso.

Come si vede la funzione derivata prima non è definita nel punto x=0 perché ivi si annulla il denominatore della frazione presente.

Per la classificazione del (0;g(0))=(0;0) studiamo i limiti laterali della funzione derivata prima.

$$\lim_{x\to 0^+} g'(x)=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+2=\frac{2}{3\sqrt[3]{0^+}}+2=2\cdot(+\infty)+2=+\infty+2=+\infty\ ;$$

$$\lim_{x\to 0^-} g'(x)=$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+2=\frac{2}{3\sqrt[3]{0^-}}+2=2\cdot(-\infty)+2=-\infty+2=-\infty$$

Il punto (0;0) è una cuspide rivolta verso il basso.

Es3) $\mathrm{h}(x)=\sqrt[3]{e^{-x}+1}\rightarrow \mathrm{h}(x)=\left(e^{-x}+1\right)^{\frac{1}{3}}$

La funzione trascendente intera è definita in tutto R ed è continua.

Studio della derivabilità.

$$h'(x)=\frac{1}{3}\left(e^{-x}+1\right)^{\frac{1}{3}-1}\cdot D\left(e^{-x}+1\right)=\frac{1}{3}\left(e^{-x}+1\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(-e^{-x}+0\right)=$$

$$\frac{-e^{-x}}{3\left(e^{-x}+1\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{-1}{3\cdot e^{x}\cdot\sqrt[3]{\left(e^{-x}+1\right)^2}}$$

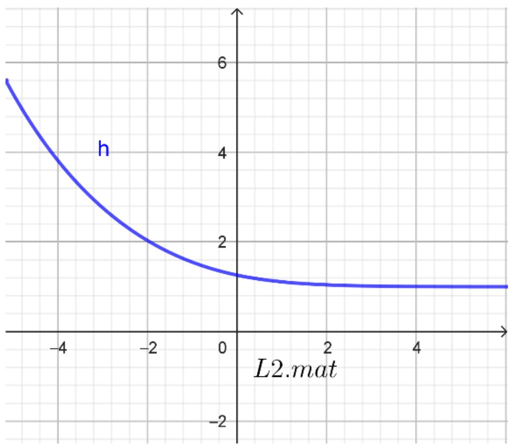

Figura 3-Funzione continua, derivabile e strettamente decrescente in tutto il dominio di definizione.

La funzione derivata prima esiste per ogni x reale e assume valori strettamente negativi. La funzione in oggetto è dunque derivabile in tutto il suo dominio: $\forall\in\Re$.

Es4) $y=\begin{cases} e^{|x|} & se \quad x<1 \\ \dfrac{1-x}{x-2} & se \quad x\geq 1\end{cases}$

La funzione in oggetto si dice "definita per casi". E' definita per ogni x reale diverso da 2: D=$\Re$ -{2}. Complessivamente è una funzione trascendente mista.

Prima di occuparci della derivabilità della funzione **va precisato se la stessa presenta punti di singolarità**. Nel caso specifico si tratta di precisare il tipo di punto per x=1 e x=2.

Studio dei limiti laterali

Per x=1$\rightarrow$ $\lim_{x\to1^-} y(x) = \lim_{x\to1^-} e^{|x|} = e$; $\lim_{x\to1^+} y(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{1-x}{x-2} = \frac{1-1}{1-2} = 0$.

I due valori sono finiti e diversi tra loro: **nel punto x=1 la funzione in esame presenta** una **discontinuità di prima specie**, con **salto** $\sigma = \lim_{x\to1^+} y(x) - \lim_{x\to1^-} y(x) = 0 - e = -e$.

Per x=2$\rightarrow$

Nel punto ***x*=2**, abbiamo già precisato che la funzione non è definita. Dallo studio dei due limiti laterali della funzione nel punto si riconosce che si tratta di una **singolarità di seconda specie**. Infatti, risulta:

$$\lim_{x\to2^-} \frac{1-x}{x-2} = \frac{1-2}{2^- - 2} = \frac{-1}{0^-} = -1(-\infty) = +\infty;\quad \lim_{x\to2^+} \frac{1-x}{x-2} = \frac{1-2}{2^+ - 2} = \frac{-1}{0^+} = -1(+\infty) = -\infty$$

Ricordiamo che un **punto al finito**, anche se non fa parte del dominio di definizione della funzione, **si dice essere di singolarità di seconda specie se almeno uno dei limiti laterali della funzione nel punto è +∞ o -∞**. Quindi, x=2 è di singolarità di seconda specie.

Derivabilità ed eventuali punti angolosi

Determiniamo l'espressione della funzione derivata prima per i punti del dominio. Si tratterà di determinare la derivata prima per ciascuna delle parti che compongono la funzione e nella determinazione delle rispettive forme escluderemo i **punti di raccordo dei diversi intervalli** che compongono il dominio. A tal proposito osserviamo che risulta:

$$e^{|x|} = \begin{cases} e^{-x} & se \quad x<0 \\ e^{x} & se \quad 0 \le x < 1 \end{cases}.$$

Ciò detto si ha:

Per x<0, y'=e^{-x}(-1)= -e^{-x}; $\quad 0<x<1$, y'= e^{x};

per x>2 e $x\neq$2, si deve eseguire la derivata di un rapporto:

$$y' = \frac{-1\cdot(x-2)-(1-x)\cdot 1}{(x-2)^2} = \; = \frac{-x+2-1+x}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2}$$

Per la ricerca degli eventuali punti angolosi si studiano i limiti laterali delle diverse espressioni della funzione derivata in ciascuno dei seguenti punti: 0, 1, 2.

- $\lim_{x\to0^-} y'(x) = \lim_{x\to0^-} -e^{-x} = -e^0 = -1$;
  $\lim_{x\to0^+} y'(x) = \lim_{x\to0^+} e^{x} = e^0 = 1$; i due valori sono finiti e diversi tra loro; quindi, **la funzione in *x*=0 non è derivabile**. Il punto (0;e^0)= (0;1) **è angoloso**.
- per 0<x<1$\rightarrow$ y'= $e^x$$\rightarrow$ $0<x<1 \rightarrow \lim_{x\to1^-} y'(x) =$
  $\lim_{x\to1^-} e^x = e$
- per 1< x <2 $\rightarrow$ $\lim_{x\to1^+} y'(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{(1-2)^2} = 1$

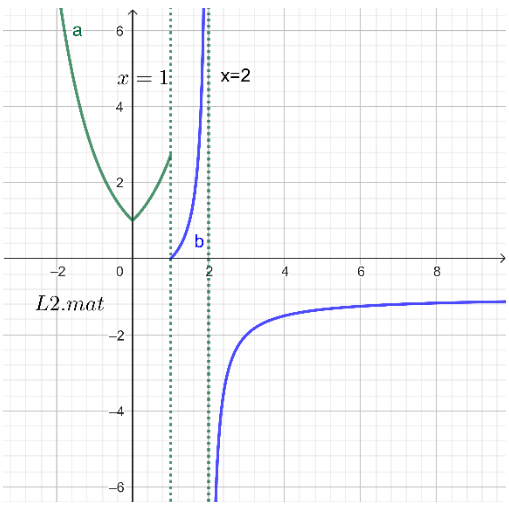

Figura 4-Funzione trascendente definita per casi. La funzione presenta due punti di singolarità x=1, di prima specie, x=2 di seconda specie ed il punto angoloso in x=0. La funzione è derivabile in tutto il dominio di definizione con esclusione dei punti x=0, x=1.

- Osserviamo che nel punto x=1 la funzione non è continua e pertanto non ha senso parlare nello stesso di derivabilità della funzione.

- $\lim_{x\to 2^-} y'(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{(2^- - 2)^2} = \frac{1}{0^+} = 1\cdot(+\infty) = +\infty$;
- per x >2→ $\lim_{x\to 2^+} y'(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{(2^+ - 2)^2} = \frac{1}{0^+} = 1\cdot(+\infty) = +\infty$

CONCLUSIONE

La funzione è derivabile in tutto il dominio di definizione con esclusione dei punti $x = 0$ e x = 1.

Nel **punto x=2**, pur non facendo parte del dominio di definizione della funzione, si dice che vi è una **singolarità di seconda specie**. Il diagramma della funzione, per $x\to 2$ tende a +∞ o -∞ da una o entrambe le parti. La retta di equazione x=2 è **asintoto verticale** a destra ed a sinistra per il diagramma della funzione.

Luigi Lecci https://www.matematicaescuola.it