Funzione parametrica definita per casi

Data la funzione reale di variabile reale

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & per \quad 0\le x<1 \\ (x-1)^2+k(x-1)+1 & per \quad 1\le x\le 3 \end{cases}$$

Risolvere i quesiti che seguono.

a) Riconoscere che la funzione è continua nell'intervallo [0;3].
b) Determinare per quale valore del parametro k la funzione è derivabile in tutto il suo dominio.
c) Per il valore di k trovato scrivere l'espressione algebrica della funzione e trovare il suo codominio.
d) Riconoscere che la funzione ottenuta è invertibile su tutto il dominio e trovare l'espressione della funzione inversa.
e) Rappresentare il diagramma della funzione.

Elaborazioni

a) Si lascia al lettore il compito di provare che la funzione per ogni k reale è continua in tutto il dominio.
b) La funzione è derivabile in ogni punto dell'intervallo [0;3] diverso dal punto x=1. Affinché sia derivabile anche nel punto x=1 è necessario che esista la derivata prima anche in detto punto. Poiché in un intorno completo del punto x=1 la funzione ha due diverse espressioni algebriche procediamo con il calcolo dei limiti laterali del rapporto incrementale relativo al punto x=1 ed imponiamo che i valori ottenuti siano uguali. Si ha:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x-1-1}{x-1}=2=f'_-(1);$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)^2+k(x-1)+1-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x-1+k)}{x-1}=$$
$$\lim_{x\to 1^+}(x-1+k)=k=f'_+(1)$$

Deve risultare $f'_-(1)=f'_+(1)$, quindi k=2. Sostituendo a k il valore trovato si riscontra che l'espressione della funzione nell'intervallo [1;3] si riduce al monomio x^2. La funzione in esame risulta così definita

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & per \quad 0\le x<1 \\ x^2 & per \quad 1\le x\le 3 \end{cases}$$

c) La funzione in oggetto è definita in un intervallo ed ha derivata prima positiva in ogni punto, dunque è strettamente crescente ed ha come codominio l'intervallo [f(0);f(3)]=[-1;9].
d) La proprietà di stretta crescenza implica che considerando come insieme delle immagini il codominio della funzione questa è invertibile. Ponendo y=f(x), la funzione inversa è così definita

$$x = f^{-1}(y) = \begin{cases} \dfrac{y+1}{2} & per \quad -1 \le y < 1 \\ \sqrt{y} & per \quad 1 \le y \le 9 \end{cases}$$

e) Il diagramma della funzione è riportato in Figura 1. In figura è stata riportata con stile tratteggio anche la semitangente destra nel punto x=1, che giace sulla retta del segmento che rappresenta il diagramma relativamente all'intervallo [0;1[. Il diagramma della funzione è dunque composto dal segmento AP, seguito dall'arco PB della parabola avente equazione $y=x^2$.

L'equazione cartesiana della semitangente è y=2x-1, con x≥1.

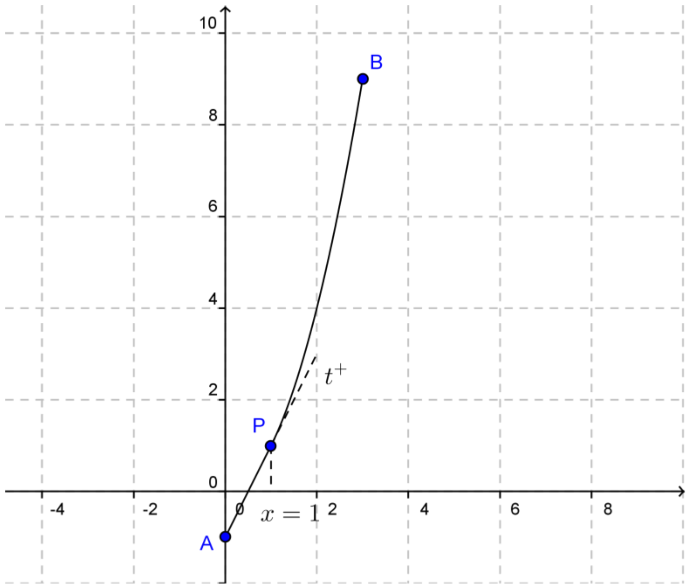

Figura 1- Il raccordo nel punto P di ascissa x=1 tra le due parti del diagramma avviene con continuità e derivabilità.