

Integrazione numerica

Considerata una funzione reale di variabile reale, definita in un intervallo $[a;b]$, continua, è noto che esiste l'integrale definito esteso al suddetto intervallo.

In alcuni casi il calcolo dell'integrale definito comporta notevoli difficoltà a causa della struttura analitica della funzione integranda. In altri casi, addirittura, non è possibile eseguire il calcolo dell'integrale definito perché per la funzione integranda non è possibile esprimere una primitiva tramite le funzioni elementari note. È il momento di ricorrere a processi di integrazione numerica che risolvano approssimativamente il problema in esame.

Infatti, dal teorema fondamentale del calcolo integrale è noto che per ogni funzione continua e definita in un intervallo chiuso si può determinare una funzione integrale relativa ad un punto iniziale prefissato e questa funzione è una primitiva della funzione assegnata. Tuttavia, il teorema non indica alcun procedimento per determinare l'espressione analitica della primitiva.

L'integrazione numerica attiva dei processi di calcolo che sfruttano le potenzialità di elaborazione dei processori e riesce a fornire valori approssimati del valore dell'integrale definito che si discostano dal valore effettivo meno di un margine prestabilito dall'operatore.

Tra i metodi noti ricordiamo:

- Metodo dei rettangoli
- Metodo dei Trapezi
- Metodo delle parabole

Il metodo dei rettangoli

Ci soffermiamo ora solo sul **metodo dei rettangoli** per illustrare dei semplici programmi in Turbo Pascal con cui eseguire il calcolo dell'integrale.

Il metodo in oggetto consiste nei seguenti passi

1. suddividere l'intervallo di integrazione $[a;b]$ in n sottointervalli tramite i punti $x_0, x_1, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$, dei quali il primo coincidente con l'estremo sinistro a e l'ultimo coincidente con l'estremo destro b ; i punti x_i possono essere scelti a piacere, purché siano distinti tra loro. In particolare i punti possono essere scelti in modo che la differenza $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ sia costante.
2. scegliere un punto ξ_i in ciascuno degli intervalli $[x_i, x_{i+1}]$ in cui calcolare la funzione: $f(\xi_i)$;
3. eseguire la seguente somma integrale $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$.
4. Il valore della somma integrale ottenuto rappresenta un'approssimazione dell'integrale definito $\int_a^b f(x) dx$.

Nel calcolo dei prodotti $f(\xi_i) \Delta x_i$, se si sceglie come punto dell'intervallo uno dei due estremi (per esempio il primo) il processo di calcolo è veloce; inoltre, se si decide di scegliere la suddivisione dell'intervallo $[a;b]$ in n sottointervalli di uguale ampiezza sarà

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = (b-a)/n.$$

Applicazione

Calcolare il valore dell'integrale definito: $\int_0^1 e^{x^2} dx$.

Di seguito riportiamo il codice del programma e alcune videate che illustrano parzialmente l'output del programma.

Dell'integrale in esame si forniscono due valori approssimati: il primo è relativo alla suddivisione dell'intervallo $[0;1]$ in 10 sottointervalli uguali, il secondo alla suddivisione dell'intervallo in 20 sottointervalli uguali.

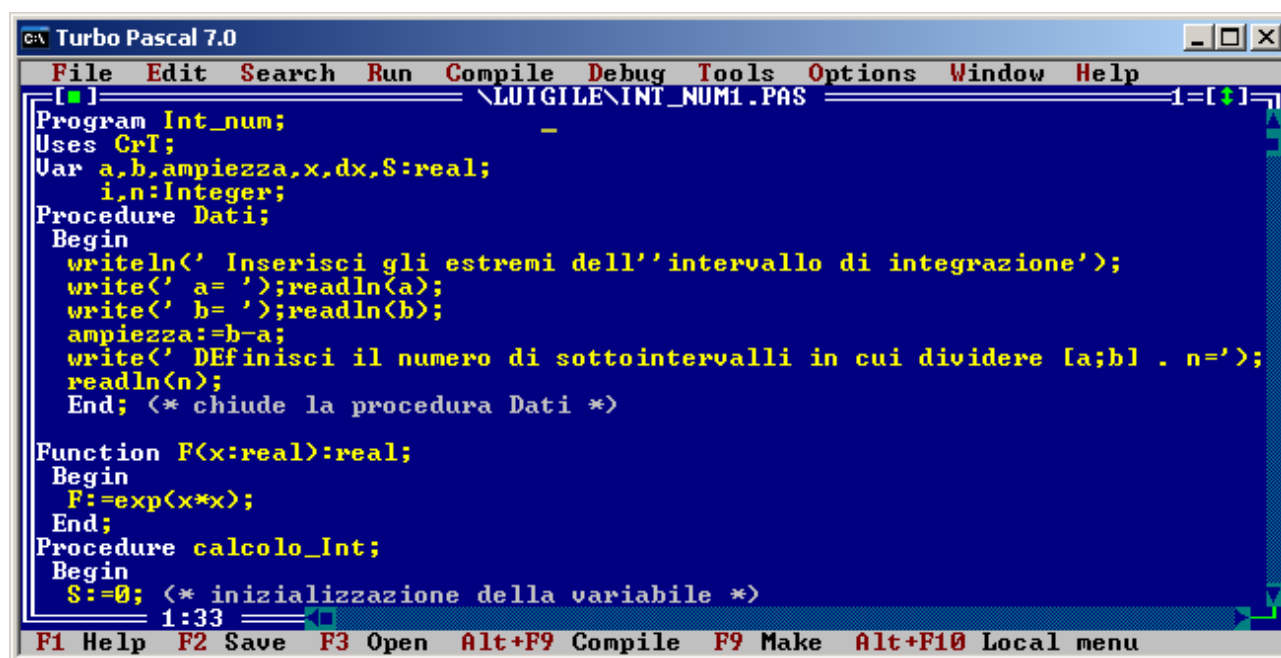
```
Program Int_num;  
Uses CrT;  
Var a,b,ampiezza,x,dx,S:real;  
    i,n:Integer;  
  
Procedure Dati;  
Begin  
    writeln(' Inserisci gli estremi dell"intervallo di integrazione');  
    write(' a= ');readln(a);  
    write(' b= ');readln(b);  
    ampiezza:=b-a;  
    write(' Definisci il numero di sottointervalli in cui dividere [a;b] . n=');  
    readln(n);  
End; (* chiude la procedura Dati *)
```

```
Function F(x:real):real;  
Begin  
    F:=exp(x*x);  
End;
```

```
Procedure calcolo_Int;  
Begin  
    S:=0; (* inizializzazione della variabile *)  
    dx:=ampiezza/n;  
    x:=a;  
    For i:=1 to n do  
        Begin  
            S:=S+F(x)*dx;  
            x:=x+dx;  
        End;  
    write(' Valore dell"integrale definito : ', S:6:4);  
End;
```

```
Begin (* Corpo principale *)  
    clrscr;  
    Dati;  
    calcolo_int;  
    Readln;  
End.
```

Seguono alcune videate relative al lavoro realizzato



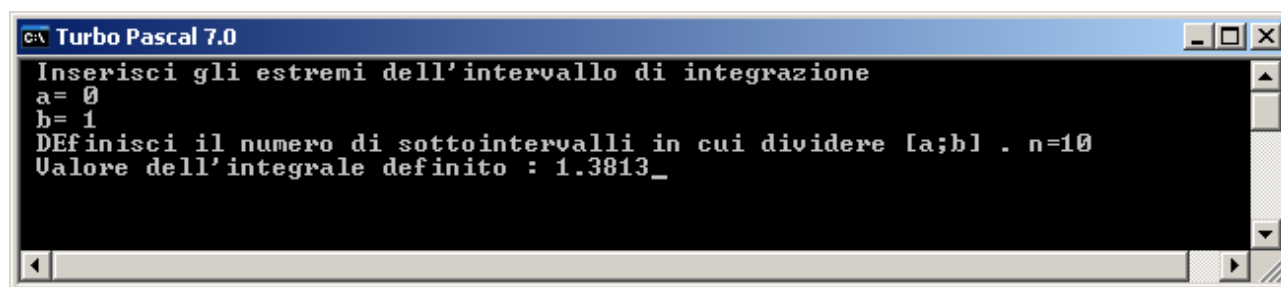
```

Turbo Pascal 7.0
File Edit Search Run Compile Debug Tools Options Window Help
\LUIGILE\INT_NUM1.PAS
Program Int_num;
Uses CrI;
Var a,b,ampiezza,x,dx,S:real;
    i,n:Integer;
Procedure Dati;
Begin
  writeln(' Inserisci gli estremi dell''intervallo di integrazione');
  write(' a= ');readln(a);
  write(' b= ');readln(b);
  ampiezza:=b-a;
  write(' DEfinisci il numero di sottointervalli in cui dividere [a;b] . n=');
  readln(n);
End; (* chiude la procedura Dati *)

Function F(x:real):real;
Begin
  F:=exp(x*x);
End;
Procedure calcolo_Int;
Begin
  S:=0; (* inizializzazione della variabile *)
  1:33
F1 Help F2 Save F3 Open Alt+F9 Compile F9 Make Alt+F10 Local menu

```

Valore dell'integrale con la suddivisione di [0;1] in 10 sottointervalli di uguale ampiezza.

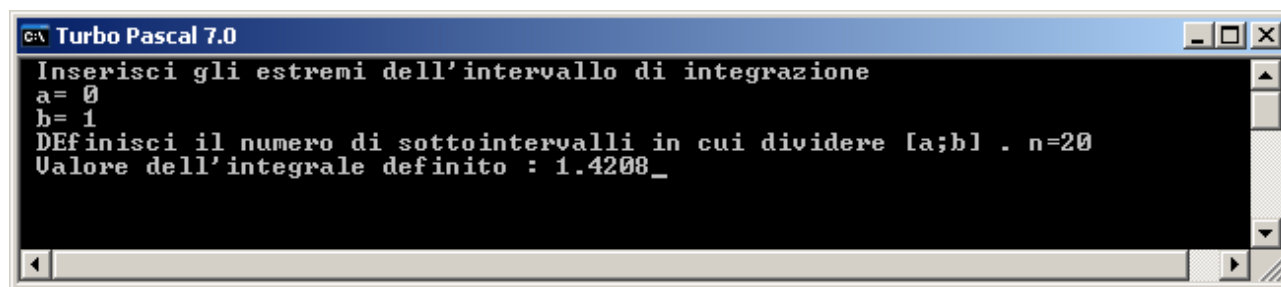


```

Turbo Pascal 7.0
Inserisci gli estremi dell'intervallo di integrazione
a= 0
b= 1
DEfinisci il numero di sottointervalli in cui dividere [a;b] . n=10
Valore dell'integrale definito : 1.3813_

```

Valore dell'integrale con la suddivisione di [0;1] in 20 sottointervalli di uguale ampiezza.



```

Turbo Pascal 7.0
Inserisci gli estremi dell'intervallo di integrazione
a= 0
b= 1
DEfinisci il numero di sottointervalli in cui dividere [a;b] . n=20
Valore dell'integrale definito : 1.4208_

```

Invito all'approfondimento

Lo studioso cerchi di modificare il programma in modo che l'utente possa decidere di iterare il calcolo dell'integrale definito finché la differenza tra due successive elaborazioni non sia inferiore ad un valore prefissato 10^{-k} , con k naturale positivo definito dall'utente.