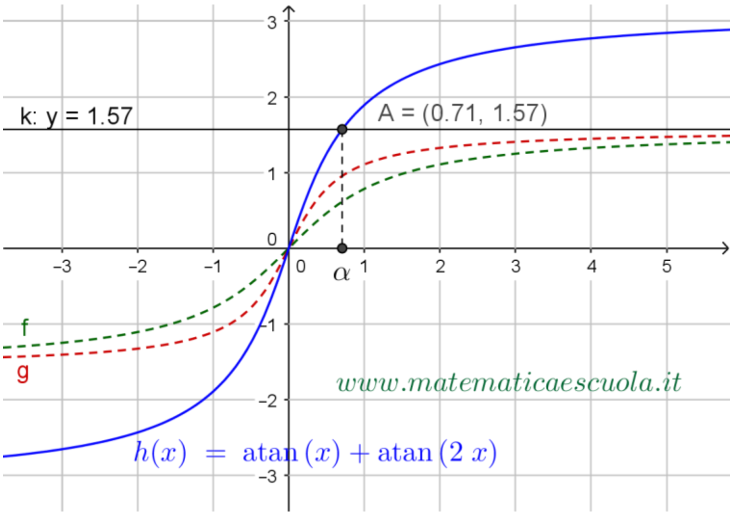
Risoluzione approssimata dell'equazione trascendente

$$\arctan(x)+\arctan(2x)=\frac{\pi}{2}$$

Per la risoluzione facciamo presente che:

1. La funzione elementare $\arctan(x)$ è definita in R, è strettamente crescente ed il suo codominio è l'intervallo $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$; analoghe proprietà ha la funzione $\arctan(2x)$.
2. La somma di due funzioni strettamente crescenti è ancora strettamente crescente, quindi la funzione $h(x)=\arctan(x)+\arctan(2x)$ è strettamente crescente ed ha come codominio]-π; π[. Questa proprietà di monotonia implica che l'equazione in oggetto ammette una ed una sola soluzione :x=α.
3. L'equazione in esame va affrontata per via grafica, precisamente si mettono a confronto i grafici delle due funzioni $h(x)=\arctan(x)+\arctan(2x)$, $y=\frac{\pi}{2}$.
4. Nella figura a margine si possono osservare i grafici delle funzioni f(x)=atan(x), g(x)=atan(2x), h(x)= atan(x) +atan(2x) e quello della retta $k: y=\frac{\pi}{2}$. Come precisato nel punto 2 la funzione h(x) assume solo una volta il valore π/2 e ciò si verifica approssimativamente per x= α = 0,70711.



5. Per **determinare un valore approssimato di α**, qualunque sia il grado di approssimazione richiesto, si può utilizzare uno dei metodi di ricerca di **analisi numerica**. Molto utilizzato è il metodo di bisezione (detto anche dicotomico). Osservando la tabella n.1, riportata di seguito, ottenuta con Excel, si nota che la differenza h(x)-π/2 cambia segno quando la variabile x passa da 0,7 a 0,8, dunque, per il teorema di esistenza degli zeri sulle funzioni continue, internamente all'intervallo [0,7;0,8] esiste almeno uno zero della funzione (che in questo caso è unico).

Tab.1					
x	arctan(x)	arctan(2x)	h(x)=arctan(x)+arctan(2x)	π/2	h(x)-π/2
0,5	0,46364761	0,78539816	1,24904577	1,57079633	-0,32175055
0,6	0,5404195	0,87605805	1,41647755	1,57079633	-0,15431878
0,7	0,61072596	0,95054684	1,56127281	1,57079633	-0,00952352
0,8	0,67474094	1,01219701	1,68693795	1,57079633	0,11614163
0,9	0,7328151	1,06369782	1,79651292	1,57079633	0,22571660
1	0,78539816	1,10714872	1,89254688	1,57079633	0,32175055

6. Se si opera con Excel si può affinare la ricerca definendo un passo di incremento più piccolo per la variabile così com'è stato fatto nella tabella n.2, dove l'incremento è stato fissato a 0,0015.

Tab.2					
x	arctan(x)	arctan(2x)	h(x)=arctan(x)+arctan(2x)	π/2	h(x)-π/2
0,7000	0,61072596	0,95054684	1,56127281	1,57079633	-0,00952352
0,7015	0,61173197	0,95155892	1,56329088	1,57079633	-0,00750544
0,7030	0,61273655	0,95256813	1,56530468	1,57079633	-0,00549165
0,7045	0,61373972	0,95357448	1,56731420	1,57079633	-0,00348212
0,7060	0,61474147	0,95457799	1,56931946	1,57079633	-0,00147686
0,7075	0,61574181	0,95557867	1,57132047	1,57079633	0,00052415
0,7090	0,61674073	0,95657651	1,57331724	1,57079633	0,00252092
0,7105	0,61773824	0,95757155	1,57530978	1,57079633	0,00451346
0,7120	0,61873434	0,95856377	1,57729811	1,57079633	0,00650178
0,7135	0,61972902	0,9595532	1,57928222	1,57079633	0,00848590

La tabella n.2 indica che il valore dello zero α cercato è interno all'intervallo [0,7060; 0,7075].