

Applicazione del concetto di ricorrenza

(Calcolo di radici quadrate con processo iterativo)

Obiettivo

Approssimare il valore delle radici quadrate dei numeri $A, \frac{A}{2}, \frac{A}{3}, \frac{A}{4}, \dots, \frac{A}{k-1}$, essendo A un numero qualsiasi positivo e k naturale maggiore o uguale a due.

Risoluzione

Conseguiamo l'obiettivo posto costruendo la **successione per ricorrenza** definita nel modo che segue. Più avanti si riporta la giustificazione teorica dell'algoritmo iterativo applicato.

- 1) Per il calcolo di $\sqrt{A}$ la definizione del termine generale della successione è

$$x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{A}{x_{n-1}} \right). \quad (1)$$

Come punto iniziale x_1 si può scegliere un qualsiasi numero positivo.

Per dimostrare l'affermazione si suppone che la successione converga ad un valore $l^{(1)}$ e si osserva che il valore del limite del primo membro della (1) deve essere uguale al valore del limite del secondo membro. Imponendo l'uguaglianza si ricava un'equazione dalla quale si ottiene il risultato.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l; \quad \text{limite del primo membro;}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{A}{x_{n-1}} \right) = \frac{1}{2} \left(l + \frac{A}{l} \right) \quad \text{limite del secondo membro;}$$

uguagliando i valori dei limiti ottenuti si ha

$$l = \frac{1}{2} \left(l + \frac{A}{l} \right), \text{ da cui } 2l^2 = l^2 + A, \text{ quindi } l^2 = A,$$

e dall'essere $l \geq 0$ deduciamo che $l = \sqrt{A}$.

- 2) Per il calcolo di $\sqrt{\frac{A}{2}}$ si segue lo stesso procedimento; la formula di ricorrenza è

$$x_n = \frac{1}{3} \left(x_{n-1} + \frac{A}{x_{n-1}} \right) \quad (2)$$

Elaborazioni

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(x_{n-1} + \frac{A}{x_{n-1}} \right) = \frac{1}{3} \left(l + \frac{A}{l} \right);$$

uguagliando i due valori e semplificando otteniamo

$$l = \frac{1}{3} \left(l + \frac{A}{l} \right) \rightarrow 3l^2 = l^2 + A \rightarrow 2l^2 = A \rightarrow l = \sqrt{\frac{A}{2}}$$

- 3) Per il caso generale $\sqrt{\frac{A}{k-1}}$ il procedimento è analogo.

$$x_n = \frac{1}{k} \left(x_{n-1} + \frac{A}{x_{n-1}} \right) \quad (3)$$

⁽¹⁾ Si osservi che quando una successione è a termini positivi se è convergente il suo limite sarà necessariamente non negativo: $l \geq 0$.

$$l = \frac{1}{k} \left(l + \frac{A}{l} \right) \rightarrow kl^2 = l^2 + A \rightarrow (k-1)l^2 = A \rightarrow l = \sqrt{\frac{A}{k-1}}$$

Un aiuto da Excel per ottenere delle approssimazioni veloci. Nella tabella a lato sono riportate alcune elaborazioni per il calcolo della radice quadrata di 3.

$$x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{3}{x_{n-1}} \right)$$

Giustificazione teorica della validità della formula di ricorrenza

La formula (1) si deduce dall'applicazione del **metodo delle tangenti** di **Newton-Fourier** per la ricerca dello zero positivo della funzione $f(x) = x^2 - A$, con $A > 0$. Infatti, detto x_0 un qualsiasi punto positivo scrivendo l'equazione della retta tangente in

$$P_0(x_0; f(x_0)),$$

$$t: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

poiché $f'(x_0) \neq 0$, si può determinare il punto in cui la retta taglia l'asse delle ascisse; l'ascissa di questo punto è

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (4)$$

Dal grafico della funzione $y = f(x)$ si riconosce che x_1 è maggiore di $\sqrt{A}$ e quindi $f(x_1) > 0$. Si procede scrivendo ancora l'equazione della retta tangente al diagramma della curva in $P_1(x_1; f(x_1))$ e si determina il suo punto di intersezione con l'asse delle ascisse, ottenendo il punto x_2 ; risulterà $\sqrt{A} < x_2 < x_1$. Iterando il procedimento si ricava la successione di punti

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \quad (5)$$

i cui elementi sono delle approssimazioni per eccesso sempre migliori di $\sqrt{A}$. La formula da applicare iterativamente per ottenere la successione è

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (6)$$

La successione è strettamente decrescente e converge proprio a $\sqrt{A}$.

Per l'esplicitazione della (4) notiamo che

$$f(x_0) = x_0^2 - A; \quad f'(x_0) = 2x_0 \rightarrow$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^2 - A}{2x_0} = \frac{x_0^2 + A}{2x_0} =$$

$$\frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{A}{x_0} \right)$$

Generalizzando il procedimento si ottiene l'espressione corrispondente della (6).

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{A}{x_n} \right)$$

N	Xn-1	Xn
0	2	1,75
1	1,75	1,732142857
2	1,73214286	1,73205081
3	1,73205081	1,732050808
4	1,73205081	1,732050808
5	1,73205081	1,732050808
6	1,73205081	1,732050808
7	1,73205081	1,732050808
8	1,73205081	1,732050808
9	1,73205081	1,732050808

