

Risoluzione di disequazioni irrazionali

Risolvere le seguenti disequazioni

$$1) \quad \frac{\sqrt{x-|x-1|}-x}{x-\sqrt{x}} \geq 0$$

$$2) \quad \frac{\sqrt{x^2-4}-x}{x-a} < 0, \text{ con } a \in \mathbf{R}$$

Soluzione

Prima disequazione

- 1) La disequazione in esame è irrazionale fratta. Per studiarla è opportuno determinare preliminarmente il **dominio A di esistenza**: si tratta di indicare sotto quali condizioni esiste la funzione reale di variabile reale

$$f: A \rightarrow \mathbf{R}, \text{ la cui espressione analitica è } f(x) = \frac{\sqrt{x-|x-1|}-x}{x-\sqrt{x}}.$$

Una volta determinato l'insieme A sarà più semplice studiare la disuguaglianza $f(x) \geq 0$.

Condizioni di esistenza (dominio di definizione)

La funzione f esiste se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

- a) $x-|x-1| \geq 0$, perché l'espressione $x-|x-1|$ è argomento di radice di indice pari;
- b) $x \geq 0$ perché x è argomento di radice di indice pari;
- c) $x-\sqrt{x} \neq 0$ perché denominatore della frazione.

Le condizioni a), b), c) devono essere soddisfatte contemporaneamente e dunque l'insieme di definizione della funzione sarà l'insieme delle soluzioni del sistema formato dalle suddette tre disequazioni⁽¹⁾.

Risoluzione delle disequazioni a), b), c).

a) $x-|x-1| \geq 0$

la disequazione è equivalente all'unione logica di due sistemi come indicato di seguito:

$$x-|x-1| \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-(x-1) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-1 < 0 \\ x-(1-x) \geq 0 \end{cases}.$$

Il primo sistema è soddisfatto $\forall x \in [1; +\infty[$.

Il secondo sistema è soddisfatto per $\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right[$

Concludiamo che l'insieme delle soluzioni della a) è $S_a = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

- b)** La condizione $x \geq 0$ è meno restrittiva della condizione imposta alla variabile dalla a), dunque ai fini della determinazione del dominio finale della funzione si può trascurare.

c) $x-\sqrt{x} \neq 0$

Risolviamo l'equazione corrispondente

$$x-\sqrt{x} = 0$$

Possiamo scriverla isolando il radicale

$$x = \sqrt{x}$$

⁽¹⁾ Ricordiamo che l'insieme delle soluzioni di un sistema di disequazioni è dato dall'intersezione degli insiemi delle soluzioni delle singole disequazioni componenti il sistema.

Poiché dalle conclusioni relative alle prime due condizioni abbiamo dedotto che la variabile x deve assumere valori strettamente positivi, l'equazione si trasforma in una equivalente elevando ambo i membri al quadrato. Si ha pertanto:

$$(x)^2 = (\sqrt{x})^2 \Leftrightarrow x^2 = x \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$$

La condizione c) è dunque verificata con $x \neq 0$ e $x \neq 1$ e, naturalmente, $x > 0$.

Dalla validità delle tre condizioni poste a sistema si deduce che il **dominio di definizione della funzione** è l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : (1/2 \leq x < +\infty) \wedge ((x \neq 0) \wedge (x \neq 1))\} = [1/2; +\infty[- \{1\}$$

Risoluzione della disequazione

La disequazione va risolta con $x \in A$.

Studieremo separatamente il segno del numeratore e quello del denominatore della frazione; successivamente si realizzerà il grafico comparativo delle soluzioni e si determinerà il segno della frazione per poi individuare le soluzioni della disuguaglianza richiesta.

Segno del numeratore

$$N(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x - |x - 1|} \geq x$$

da studiare per $x \geq 1/2$.

Poiché per $x \geq 1/2$ il radicando è non negativo (e lo è anche il primo membro della disuguaglianza) ed evidentemente lo è anche il secondo membro, si possono elevare ambo i membri al quadrato e si ottiene una disequazione equivalente a quella di partenza.

$$x - |x - 1| \geq x^2 \Leftrightarrow x^2 - x + |x - 1| \leq 0. \quad (N.1)$$

La presenza del modulo richiede che si tenga conto del segno del suo argomento nel dominio di variabilità di x . Poiché

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

è necessario studiare separatamente la disequazione al variare di x in ciascuno dei due

intervalli $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $]1; +\infty[$.

Primo caso: $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

In quest'intervallo l'espressione della (N.1) diventa

$$x^2 - x + 1 - x \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \leq 0 \text{ che è soddisfatta solo per } x = 1, \text{ ma detto valore non appartiene all'intervallo considerato; nell'intervallo in esame il numeratore è negativo.}$$

Secondo caso: $x \in]1; +\infty[$

In quest'intervallo l'espressione della (N.1) diventa

$$x^2 - x + x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 0 \quad (N.2)$$

che è soddisfatta per i valori di x che verificano la doppia disuguaglianza $-1 \leq x \leq 1$.

Dunque nell'intervallo in esame $]1; +\infty[$ la disequazione non ha soluzioni e perciò il

numeratore è negativo.

Riassumendo i risultati ottenuti nei due casi concludiamo che in ogni punto del dominio il numeratore della frazione è strettamente negativo: $N(x) < 0$.

Segno del denominatore

Si deve studiare la disequazione

$$D(x) > 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{x}$$

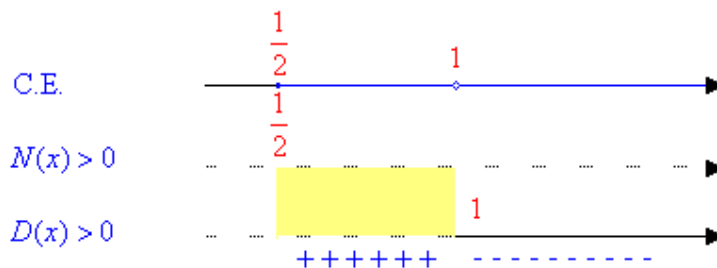
Con $x \in [1/2; +\infty[- \{1\}$ la disequazione è equivalente a quella ottenuta elevando ambo i membri al quadrato, quindi alla seguente

$$x^2 > x \Leftrightarrow x^2 - x > 0$$

Quest'ultima è soddisfatta $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$, ma in virtù del dominio di definizione sono accettabili solo i valori $x > 1$. Concludiamo che nel dominio di definizione il denominatore è negativo nell'intervallo $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ e positivo nell'intervallo $]1; +\infty[$.

Grafico comparativo e segno della frazione

A questo punto realizziamo il grafico comparativo delle soluzioni delle disequazioni $N(x) > 0$, $D(x) > 0$ per determinare il segno della frazione. Il grafico è riportato di seguito.



Conclusione

La disequazione in esame è soddisfatta nell'insieme $D = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Seconda disequazione

5.2 $\frac{\sqrt{x^2 - 4} - x}{x - a} < 0$, con $a \in \mathbf{R}$

Si tratta di una disequazione irrazionale fratta parametrica. E' necessario determinare il dominio di definizione ed in esso studiare il segno del numeratore e del denominatore e realizzare i diversi grafici comparativi che dipenderanno dai valori del parametro reale a .

Le condizioni di esistenza della frazione sono date da $x^2 - 4 \geq 0$ e $x - a \neq 0$, che devono essere soddisfatte contemporaneamente e perciò i valori reali x che definiscono il dominio sono le soluzioni del seguente sistema:

$$C.E.: \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x - a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} (x \leq -2) \vee (x \geq 2) \\ x \neq a \end{cases}$$

Studio dei segni del numeratore e del denominatore.

$$N(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4} - x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4} > x$$

Distinguiamo i due casi:

(N1) per $x \leq -2$ la disequazione è soddisfatta per ogni $x \Rightarrow S_{(N1)} =]-\infty; -2]$;

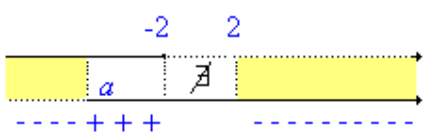
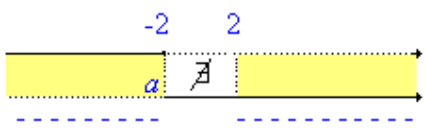
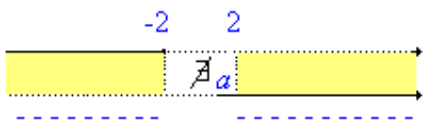
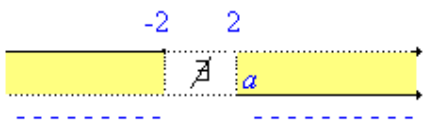
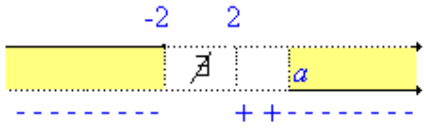
(N2) per $x \geq 2$ la disequazione è equivalente a quella ottenuta elevando ambo i membri al quadrato, cioè

$$x^2 - 4 > x^2$$

che non ha soluzioni. Pertanto, nel dominio di definizione, concludiamo che il numeratore è positivo solo per $\forall x \in S_{(N1)} =]-\infty; -2]$, mentre è negativo nell'intervallo $[2; +\infty[$.

Il denominatore è positivo se $x > a$.

In tabella riportiamo la discussione dei casi ottenuti confrontando il valore del parametro a con i capisaldi $-2, 2$; nella stessa sono indicate caso per caso le soluzioni della disequazione in esame.

Discussione delle soluzioni della disequazione al variare dei valori del parametro a	
Valore del parametro	Soluzioni della disequazione
$a < -2$	$N(x) > 0$ $D(x) > 0$  Soluzioni: $S =]-\infty; a[\cup]2; +\infty[$
$a = -2$	$N(x) > 0$ $D(x) > 0$  Soluzioni: $S =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$
$-2 < a < 2$	$N(x) > 0$ $D(x) > 0$  Soluzioni: $S =]-\infty; -2] \cup]2; +\infty[$
$a = 2$	$N(x) > 0$ $D(x) > 0$  Soluzioni: $S =]-\infty; -2] \cup]2; +\infty[$
$a > 2$	$N(x) > 0$ $D(x) > 0$  Soluzioni: $S =]-\infty; -2] \cup]a; +\infty[$