

Disequazioni irrazionali¹

Risolvere le seguenti disequazioni

a) $\sqrt{2x^2 - 5x + 1} \leq x - 1$, b) $\frac{x-1}{2-\sqrt{x}} < \sqrt{x} + 1$

Soluzione

a) La disequazione è equivalente al seguente sistema

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 1 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 5x + 1 \leq (x-1)^2 \end{cases}$$

La prima disequazione è soddisfatta nell'insieme $S_1 = \left[-\infty; \frac{5-\sqrt{17}}{4}\right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{17}}{4}; +\infty\right]$

La seconda disequazione è soddisfatta nell'intervallo $S_2 = [1; +\infty[$

Riducendo alla forma normale la terza disequazione si ha

$x^2 - 3x \leq 0$ che è soddisfatta nell'intervallo $S_3 = [0; 3]$.

Il sistema di disequazioni è soddisfatto nell'insieme $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \left[\frac{5+\sqrt{17}}{4}; 3\right]$

b) Osserviamo che la disequazione è definita nel dominio $D = \{x \in \mathbb{R} : (x \geq 0) \wedge (x \neq 2)\}$.

Per i valori del dominio si può elaborare la disequazione riducendola ad una forma più semplice. Infatti, notato che il secondo membro è strettamente positivo e che si può scrivere

$x - 1 = (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)$, per la disequazione si ha:

$$\frac{x-1}{2-\sqrt{x}} < \sqrt{x} + 1 \rightarrow \frac{(\cancel{\sqrt{x}+1})(\sqrt{x}-1)}{2-\sqrt{x}} < (\cancel{\sqrt{x}+1}) \rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x}} < 1 \rightarrow \frac{2\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} < 0$$

La disequazione ottenuta è soddisfatta nell'insieme $S = \left]0; \frac{9}{4}\right[\cup]4; +\infty[$.

Osservazione

Se non si procede con la semplificazione indicata si perviene alla disequazione

$\frac{2x-\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} < 0$, che risolta fornisce ovviamente lo stesso insieme di soluzione.

¹ Esercizi assegnati nella prova del 4-05-2010 per l'accertamento del superamento dei debiti formativi relativi al primo quadrimestre.