

Discussione di un sistema parametrico

Discutere al variare del parametro reale k il seguente sistema

$$\begin{cases} xy = 2 \\ x + ky - 2k + 1 = 0 \\ x > 1 \end{cases}$$

Soluzione

Osserviamo subito che nel sistema figurano l'equazione di un'iperbole equilatera: $xy=2$, il cui diagramma è contenuto nei quadranti primo e terzo e l'equazione di un fascio proprio di rette di centro il punto $C(-1;2)$. Si tratta di stabilire per quali valori del parametro k la generica retta del fascio incontra l'arco dell'iperbole che ricade nel semipiano $x>1$.

In Fig.1 sono rappresentati l'iperbole, il centro C del fascio di rette ed alcune rette del fascio.

Ricordiamo che se l'equazione di un fascio di rette è scritta in modo che contenga un solo parametro allora al variare di questo si otterranno tutte le rette del fascio tranne una (la retta limite o esclusa del fascio). Nel fascio in esame la retta limite ha equazione $y=2$. In Fig.1 è rappresentata anche questa retta.

In Fig.1 è rappresentata anche la retta di equazione $x=1$; essa è utile perché divide il piano cartesiano in due semipiani e noi siamo interessati a trovare le intersezioni tra la generica retta s del fascio e l'arco di iperbole che ricade nel semipiano i cui punti hanno ascissa $x>1$.

Per risolvere ora il problema è necessario ricavare l'equazione risolvente del sistema proposto per vedere intanto per quali valori del parametro si hanno rette del fascio che hanno punti in comune con l'iperbole: la condizione algebrica che si deve verificare sarà $\Delta \geq 0$, essendo Δ il discriminante dell'equazione di secondo grado risolvente del sistema.

$$\begin{cases} xy = 2 \\ x + ky - 2k + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow ky^2 + (1-2k)y + 2 = 0 \rightarrow \Delta = (1-2k)^2 - 8k \geq 0$$

La disuguaglianza è soddisfatta per i valori reali $k \in]-\infty; \frac{3}{2} - \sqrt{2}[\cup \left] \frac{3}{2} + \sqrt{2}; +\infty \right[$.

Occorre precisare ora per quali valori del parametro k i punti comuni all'iperbole ed alle corrispondenti rette del fascio hanno ascissa $x>1$.

Osserviamo che in corrispondenza ai valori del parametro $k_1 = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$, $k_2 = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ si ottengono le due rette del fascio che sono tangenti all'iperbole. In particolare, riconosciuto che il coefficiente angolare della generica retta del fascio è $m = -\frac{1}{k}$, e che $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, le due rette tangenti

all'iperbole hanno pendenza negativa. Da semplici considerazioni geometriche si deduce che la retta tangente nel semipiano delle ascisse positive ha coefficiente angolare in valore assoluto minore di quello della retta tangente nel semipiano delle ascisse negative; naturalmente si può dedurre

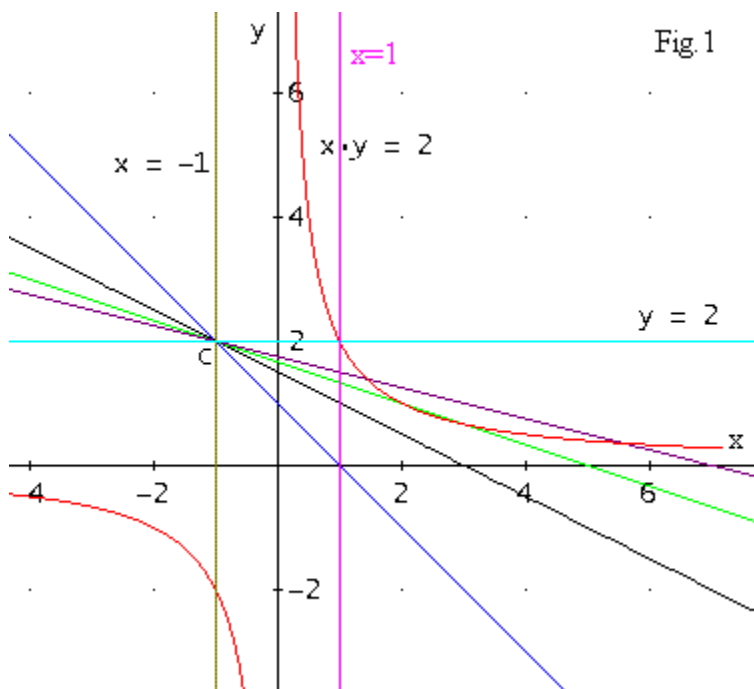


Fig.1

questa informazione per via algebrica determinando i coefficienti angolari delle due rette ed i rispettivi punti di contatto con la curva. Non riteniamo necessario trovare questi elementi; ci basta aver “intuito” come effettuare la scelta tra i valori k_1, k_2 : il valore corrispondente alla retta tangente all’arco caratterizzato da $x > 1$ è $k_2 = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$.

Coordinate del punto di contatto

L’ordinata del punto di contatto T è data dal valore comune delle soluzioni dell’equazione risolvente il sistema allorché si ponga nella stessa $k = k_2 = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$. Per l’ordinata si ha:

$$y_T = -\frac{1-2k}{2k} = \dots = 2(\sqrt{2}-1) \quad \text{e per l’ascissa}$$

$$x_T = \frac{2}{y_T} = \sqrt{2} + 1$$

Il punto di contatto ha ascissa maggiore di uno, dunque si trova sull’arco dell’iperbole utile per la discussione.

L’equazione della retta tangente all’iperbole in T è

$$t: 2x + (3 + 2\sqrt{2})y - 4 - 4\sqrt{2} = 0$$

il cui coefficiente angolare è $m = 4\sqrt{2} - 6$.

Siamo ora interessati a determinare i valori del parametro k per i quali la rette del fascio intersecano l’arco utile dell’iperbole. La rappresentazione grafica ci indica che le rette utili del fascio sono quelle il cui coefficiente angolare è negativo ma che risulta maggiore o uguale al coefficiente angolare della retta tangente. Il coefficiente angolare della generica retta del fascio è $m = -1/k$ e per quanto precisato affermiamo che i valori di k sono le soluzioni del seguente sistema algebrico:

$$\begin{cases} -\frac{1}{k} < 0 \\ -\frac{1}{k} \geq 4\sqrt{2} - 6 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono i valori

$$\text{reali } k \geq \frac{3}{2} + \sqrt{2}.$$

Conclusioni

Con $k = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ si ottiene la retta t del

fascio tangente in T all’iperbole e si hanno due soluzioni ordinarie coincidenti.

Con $k > \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ si hanno rette del fascio

che tagliano l’arco utile dell’iperbole in due punti distinti e dunque si hanno due soluzioni ordinarie distinte.

Si osservi la Fig.2 per i riferimenti grafici.

