

Risoluzione di disequazioni logaritmiche

⁽¹⁾ Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche.

a) $\log_{0,5}(x^2 - 1) > \log_2 4$

b) $\frac{1}{2} \log_3(x^2 + 8x) < \log_3(x + 2)$

c) $4 \log_{\sqrt{2}}(x - 1) - \log_{\sqrt{2}}(x - 1) - \frac{1}{2} \geq 0$

Soluzione

a) $\log_{0,5}(x^2 - 1) > \log_2 4 \rightarrow \log_{0,5}(x^2 - 1) > 2$

La disequazione è equivalente al seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x < -1) \vee (x > 1) \\ -\frac{\sqrt{5}}{2} < x < \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad \text{L'insieme delle soluzioni è: } S = \left]-\frac{\sqrt{5}}{2}; -1\right[\cup \left]1; \frac{\sqrt{5}}{2}\right[$$

b) $\frac{1}{2} \log_3(x^2 + 8x) < \log_3(x + 2)$

La disequazione è definita nell'insieme delle soluzioni del seguente sistema: $\begin{cases} x^2 + 8x > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases}$.

Tenendo presenti le proprietà dei logaritmi e la proprietà di stretta crescenza della funzione logaritmica avente base maggiore di uno, l'insieme delle soluzioni della disequazione in esame coincide con quello delle soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + 8x > 0 \\ x + 2 > 0 \\ x^2 + 8x < (x + 2)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x < -8) \vee (x > 0) \\ x > -2 \\ x < 1 \end{cases} \quad \text{L'insieme delle soluzioni è: } S =]0; 1[.$$

c) $4 \log_{\sqrt{2}}(x - 1) - \log_{\sqrt{2}}(x - 1) - \frac{1}{2} \geq 0$

Ponendo $\log_{\sqrt{2}}(x - 1) = t$ si ottiene la disequazione ausiliaria di secondo grado

$$8t^2 - 2t - 1 \geq 0 \text{ che è soddisfatta per i valori di } t \text{ che verificano la condizione } \left(t \leq -\frac{1}{4}\right) \vee \left(t \geq \frac{1}{2}\right).$$

Tornando alla variabile x la condizione diventa:

$$\left(\log_{\sqrt{2}}(x - 1) \leq -\frac{1}{4}\right) \vee \left(\log_{\sqrt{2}}(x - 1) \geq \frac{1}{2}\right);$$

$$\log_{\sqrt{2}}(x - 1) \leq -\frac{1}{4} \quad \text{è soddisfatta in} \quad S_1 = \left]1; 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right];$$

$$\log_{\sqrt{2}}(x - 1) \geq \frac{1}{2} \quad \text{è soddisfatta in} \quad S_2 = \left[1 + \sqrt[4]{2}; +\infty\right[,$$

per cui la disequazione in oggetto è soddisfatta nell'insieme $S = S_1 \cup S_2$.

⁽¹⁾ Esercizio presente nella prova di Matematica assegnata il 13-10-2009 nella Classe 4I - del Liceo S. G. Stampacchia-Tricase