

Proprietà delle radici di un'equazione (caso delle equazioni di 2°, 3° e 4° grado)

Premessa

Ricordiamo che essendo $P(x)$ un polinomio di grado n a coefficienti reali, l'equazione
$$P(x) = 0$$

nel campo complesso ammette n radici, che possono essere tutte distinte oppure no; può anche succedere che siano tutte coincidenti.

Si dimostra che le eventuali radici complesse sono presenti a coppie e quindi un'equazione di grado dispari ammette almeno una radice reale.

* * * * *

In questa sede ci soffermiamo sulle equazioni di secondo, terzo e quarto grado per mettere in risalto una proprietà delle radici.

Equazione di secondo grado

L'equazione di secondo grado ridotta alla forma normale ha la seguente espressione:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{con } a \neq 0.$$

Nello studio delle proprietà delle radici di un'equazione di secondo grado si fa vedere che per la somma ed il prodotto delle radici x_1, x_2 sussistono le note relazioni:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ebbene, l'equazione può essere messa sotto una forma diversa; precisamente, dividendo i coefficienti per a si ottiene l'equazione equivalente:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

e ponendo $\frac{b}{a} = -s, \quad \frac{c}{a} = p$

ottenere la forma semplificata

$$x^2 - sx + p = 0, \tag{1}$$

che ovviamente ammette le stesse radici.

Possiamo concludere che in un'equazione di secondo grado, scritta nella forma in cui il coefficiente di x^2 sia uno, l'opposto del coefficiente del termine di primo grado è uguale alla somma delle radici, mentre il termine noto è uguale al prodotto delle stesse.

Equazione di terzo grado

Un'equazione di terzo grado ridotta alla forma normale, se contiene tutti i termini, si presenta sotto la forma

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{2}$$

Indicando con x_1, x_2, x_3 , le radici nel campo complesso, vogliamo provare che sussistono le seguenti uguaglianze

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a, \tag{2.1}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -c \tag{2.2}$$

Dimostrazione

Con $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, essendo $x = x_1$ una radice dell'equazione, quindi

risultando $P(x_1) = 0$, sappiamo che il polinomio $P(x)$ è divisibile per il binomio $(x - x_1)$, per cui si

può scrivere $P(x) = (x - x_1)Q_1(x)$. Analogamente, il polinomio sarà divisibile per ciascuno dei due binomi $(x - x_2)$, $(x - x_3)$. In definitiva, il polinomio $P(x)$ si può scrivere nella forma seguente:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \quad (2.3)$$

Eseguendo i prodotti nella (2.3) e sommando i termini simili si ottiene un'espressione del polinomio che deve coincidere con il primo membro dell'equazione (2). Ebbene, applicando il principio di identità dei polinomi, si riconoscerà la validità delle uguaglianze (2.1), (2.2). Riportiamo le elaborazioni.

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = (x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 \quad (2.4)$$

Dal confronto dell'espressione ottenuta con il primo membro della (2), si evince che i due polinomi siano identici se e solo se sono uguali ordinatamente i coefficienti dei termini omologhi, dunque devono sussistere le uguaglianze

$$-(x_1 + x_2 + x_3) = a, \quad -x_1x_2x_3 = c,$$

che sono le due tesi.

Equazione di quarto grado

Un'equazione di quarto grado ridotta alla forma normale, se contiene tutti i termini si presenta sotto la forma

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (3)$$

Indicando con x_1, x_2, x_3, x_4 le quattro radici nel campo complesso, vogliamo provare che sussistono le uguaglianze

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a \quad (3.1)$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = d \quad (3.2)$$

Dimostrazione

Dopo aver eseguito

- la divisione esatta $P(x) : (x - x_1)$ e ottenuto $P(x) = (x - x_1)Q_1(x)$;
- la divisione esatta $Q_1(x) : (x - x_2)$ e ottenuto $Q_1(x) = (x - x_2)Q_2(x)$;
- la divisione esatta $Q_2(x) : (x - x_3)$ e ottenuto $Q_2(x) = (x - x_3)(x - x_4)$

si perviene alla seguente fattorizzazione del polinomio $P(x)$:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

A questo punto è necessario sviluppare i prodotti ed eseguire la somma dei termini simili.

Per evitare di eseguire tutti i prodotti, facciamo presente che dalla trattazione del caso relativo all'equazione di terzo grado è noto che per il prodotto dei primi tre fattori si avrà

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 + a'x^2 + b'x + c', \text{ essendo}$$

$$a' = -(x_1 + x_2 + x_3), \quad b' = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \quad c' = -x_1x_2x_3.$$

Procediamo sviluppando il prodotto $(x^3 + a'x^2 + b'x + c')(x - x_4)$.

$$(x^3 + a'x^2 + b'x + c')(x - x_4) = x^4 + (a' - x_4)x^3 + (b' - a'x_4)x^2 + (c' - b'x_4)x - c'x_4 = x^4 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x^3 + (b' - a'x_4)x^2 + (c' - b'x_4)x + x_1x_2x_3x_4 \quad (3.3)$$

Dal confronto dell'espressione (3.3) con il primo membro dell'equazione (3), sempre per il principio di identità dei polinomi, si deducono le due tesi.