

Operazioni con i logaritmi

1. Calcolare il seguente valore numerico $\log_4 \sqrt{2\sqrt{\frac{1}{2}}}$
2. Risolvere l'equazione logaritmica $\log_{(2x-1)} 3 = 2$
3. Stabilire il valore di verità della seguente proposizione $(\log_x 4) \cdot (\log_2 x) = 2, \forall x > 0$

Soluzione

1

Il calcolo del valore numerico si esegue trasformando l'argomento del logaritmo in modo da ricondurlo ad una potenza del 2 (due), successivamente si effettua il cambiamento di base per il logaritmo passando al sistema di base due.

$$\begin{aligned}\log_4 \sqrt{2\sqrt{\frac{1}{2}}} &= \log_4 \sqrt{2 \cdot \left(2^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}} = \log_4 \sqrt{2 \cdot 2^{-\frac{1}{2}}} = \log_4 \sqrt{2^{\frac{1}{2}}} = \log_4 \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \log_4 \left(2^{\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{4} \cdot \log_4 2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

2

$$\log_{(2x-1)} 3 = 2$$

L'equazione logaritmica in esame ha senso se la base del logaritmo è un numero positivo diverso da uno, quindi x deve verificare il seguente sistema

$$\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ 2x-1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in D = \left] \frac{1}{2}; 1 \right[\cup]1; +\infty[$$

Ciò premesso, applicando la definizione di logaritmo, l'equazione logaritmica si trasforma nella seguente equazione algebrica:

$$(2x-1)^2 = 3 \Rightarrow 2x-1 = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Il valore trovato appartiene all'insieme D , dunque è soluzione dell'equazione e non vi sono altre soluzioni.

3

$$(\log_x 4) \cdot (\log_2 x) = 2, \forall x > 0$$

Si tratta di stabilire il valore di verità di una proposizione, precisamente stabilire se l'uguaglianza indicata è vera $\forall x > 0$. Ebbene, osserviamo intanto che essendo x base di un logaritmo deve essere positivo e diverso da uno, dunque si può già concludere che l'affermazione è falsa. Elaboriamo, tuttavia, l'espressione al primo membro con $x > 0$ e $x \neq 1$.

$$(\log_x 4) \cdot (\log_2 x) = \frac{\log_2 4}{\log_2 x} \cdot \log_2 x = \log_2 4 = 2$$

Si badi che la semplificazione ha potuto avere luogo perché con le ipotesi poste risulta $\log_2 x \neq 0$.

Conclusione

L'uguaglianza è vera se è formulata nel modo seguente

$$(\log_x 4) \cdot (\log_2 x) = 2 \text{ con } x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$$