

Numeri complessi

A) Considerato il numero complesso $z = \frac{x-iy}{1+i\sqrt{3}}$ stabilire per quali valori reali di x ed y il numero z è reale.

B)⁽¹⁾ Considerato il numero complesso $z = \frac{3}{4} + i\frac{3\sqrt{3}}{4}$ risolvere i quesiti seguenti.

Q1- Scrivere il numero complesso in forma trigonometrica.

Q2- Calcolare $z \cdot \bar{z}$, $z : \bar{z}$, z^6 , $\sqrt[3]{z^2}$

C)⁽²⁾ Sfruttando opportunamente le proprietà delle potenze calcolare l'espressione $i^{13} \cdot (1+i)^{12}$.

Soluzione

A) Elaboriamo la forma algebrica del numero complesso moltiplicando numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore ed eseguiamo le operazioni di semplificazione.

$$z = \frac{x-iy}{1+i\sqrt{3}} = \frac{x-iy}{1+i\sqrt{3}} \cdot \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{1}{4} \left[(x-y\sqrt{3}) - i(x\sqrt{3}+y) \right]$$

Il numero ottenuto è reale se è nullo il coefficiente della parte immaginaria, quindi se risulta:

$$x\sqrt{3} + y = 0 \rightarrow y = -\sqrt{3}x$$

Conclusione

Il numero complesso z è reale se e solo se tra x ed y sussiste la relazione $y = -\sqrt{3}x$.

B)

Q1- Il modulo del numero complesso è

$$\rho = \left| \frac{3}{4} + i\frac{3\sqrt{3}}{4} \right| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{27}{16}} = \frac{3}{2}$$

Indicato con θ l'argomento si ha

$$\cos \theta = \frac{3}{4} : \rho = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}; \quad \sin \theta = \frac{3\sqrt{3}}{4} : \rho = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ da cui } \theta = 60^\circ.$$

La forma trigonometrica è pertanto: $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \frac{3}{2}(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$

Q2-

- $z \cdot \bar{z} = \left(\frac{3}{4} + i\frac{3\sqrt{3}}{4} \right) \left(\frac{3}{4} - i\frac{3\sqrt{3}}{4} \right) = \left(\frac{3}{4} \right)^2 - i^2 \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} \right)^2 = \frac{9}{4}$
- $z : \bar{z} = \frac{\frac{3}{4} + i\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{4} - i\frac{3\sqrt{3}}{4}} = \frac{\left(\frac{3}{4} + i\frac{3\sqrt{3}}{4} \right)^2}{\frac{9}{4}} = \frac{4 \left(\frac{9}{16} - \frac{27}{16} + \frac{9\sqrt{3}}{8}i \right)}{9} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- Per il calcolo della potenza z^6 sfruttiamo la regola di De Moivre:
$$z^6 = \left[\frac{3}{2}(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) \right]^6 = \left(\frac{3}{2} \right)^6 [\cos(6 \cdot 60^\circ) + i \sin(6 \cdot 60^\circ)] = \frac{729}{64}(\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ) = \frac{729}{64}$$

⁽¹⁾ Esercizio assegnato nel compito in classe in 4E/Liceo Scientifico G. Stampacchia il 3-06-2010

⁽²⁾ Esercizio assegnato nel compito in classe in 4E/Liceo Scientifico G. Stampacchia il 3-06-2010

- Per il calcolo di $\sqrt[3]{z^2}$, osserviamo che risulta:

$$\sqrt[3]{z^2} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}} (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$$

e dunque si tratta di scrivere le tre radici cubiche del numero complesso

$$\frac{9}{4} (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ).$$

I valori richiesti si determinano applicando la formula

$$w_k = \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \left[\cos \left(\frac{120^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} \right) + i \sin \left(\frac{120^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} \right) \right], \text{ con } k=0, 1, 2.$$

Le tre radici sono:

$$w_0 = \sqrt[3]{\frac{9}{4}} [\cos(40^\circ) + i \sin(40^\circ)]$$

$$w_1 = \sqrt[3]{\frac{9}{4}} [\cos(160^\circ) + i \sin(160^\circ)]$$

$$w_2 = \sqrt[3]{\frac{9}{4}} [\cos(280^\circ) + i \sin(280^\circ)]$$

- C) Per il calcolo dell'espressione $i^{13} \cdot (1+i)^{12}$ scriviamo innanzitutto i numeri che figurano come basi delle potenze in forma esponenziale, quindi sfruttando la formula di Moivre si calcola il risultato dell'espressione.

$$\begin{aligned} i^{13} \cdot (1+i)^{12} &= \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)^{13} \cdot \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{12} = \left(e^{i \frac{\pi}{2}} \right)^{13} \cdot 2^6 \cdot \left(e^{i \frac{\pi}{4}} \right)^{12} = \\ 2^6 \cdot e^{i \frac{\pi}{2} \cdot 13 + i \frac{\pi}{4} \cdot 12} &= 2^6 \cdot e^{i \left(\frac{\pi}{2} + 6\pi + 3\pi \right)} = 2^6 \cdot e^{i \frac{3\pi}{2}} = -2^6 \end{aligned}$$