

Esercizio sui numeri complessi

Dato il numero complesso $z = -1 + i\sqrt{3}$

calcolare: $\frac{z-1}{z+1}$, z^4 , $\sqrt[3]{z}$

Soluzione

- $\frac{z-1}{z+1} = \frac{-1+i\sqrt{3}-1}{-1+i\sqrt{3}+1} = \frac{-2+i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}} \cdot \frac{-i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}} = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}i$
- Per calcolare la potenza z^4 conviene esprimere z in forma trigonometrica ed applicare la regola di De Moivre. Si ha:

$$z = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \rightarrow$$

$$z^4 = 2^4 \left(\cos \frac{4 \cdot 2\pi}{3} + i \sin \frac{4 \cdot 2\pi}{3} \right) = 16 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 8(-1 + i\sqrt{3}).$$

- Per il calcolo delle radici cubiche di z ricordiamo che da

$$\rho(\cos \theta + i \sin \theta) \Rightarrow \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\rho} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{3} \right), \text{ con } k=0, 1, 2.$$

I valori delle tre radici cubiche sono:

$$w_0 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(\frac{2}{3}\pi \cdot \frac{1}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2}{3}\pi \cdot \frac{1}{3} \right) \right) = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{2}{9}\pi + i \sin \frac{2}{9}\pi \right);$$

$$w_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{8}{9}\pi + i \sin \frac{8}{9}\pi \right);$$

$$w_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{16}{9}\pi + i \sin \frac{16}{9}\pi \right)$$