

Algebra lineare⁽¹⁾

Calcolo di determinanti

Es1- Calcolare il determinante $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 60 & 25 \end{vmatrix}$

Notiamo che:

- gli elementi della quinta riga sono divisibili per 5 e quelli della quarta colonna sono divisibili per 4; pertanto possiamo semplificare la forma del determinante estraendo i fattori 5 e 4;
- procediamo con il calcolo del determinante applicando la regola di Laplace alla prima riga.

Si ha:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 60 & 25 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

A questo punto osserviamo che la quarta riga è uguale alla somma delle prime due e quindi il valore del determinante è zero.

* * * * *

Es2- Essendo a, b, c, d costanti reali, utilizzando le proprietà dei determinanti dimostrare che il seguente determinante vale zero

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a-6 & b-6 & c-6 & d-6 \\ a+10 & b+10 & c+10 & d+10 \\ a & 2b & 3c & 4d \end{vmatrix}$$

Soluzione

Per i determinanti sussistono (tra le altre) le seguenti regole.

- Se ad una linea di un determinante si sostituisce la differenza tra detta linea ed una linea parallela, il valore del determinante non cambia.
- Se un determinante ha due linee parallele proporzionali, in particolare uguali, il valore del determinante è nullo.

Ciò premesso, sottraendo alla seconda e alla terza riga la prima riga si ottiene il seguente determinante

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -6 & -6 & -6 & -6 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \\ a & 2b & 3c & 4d \end{vmatrix}$$

⁽¹⁾ Esercizi assegnati nel compito in classe M4_4D-14-02-12 (classe quarta di Liceo Scientifico, Indirizzo PNI)

che ha lo stesso valore del precedente.

Si osserva ora che la seconda e la terza riga sono proporzionali, infatti il rapporto tra gli elementi della seconda riga ed i corrispondenti della terza vale $-3/5$, dunque le due linee sono proporzionali e quindi il determinante vale zero, indipendentemente dai valori dei parametri a, b, c, d . CVD