

Esercizi di base sui logaritmi

Applicando la definizione di logaritmo e le proprietà dei logaritmi, risolvere i seguenti esercizi.

E1) Calcolare

a) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \cdot \log_2 2 = 4 \cdot 1 = 4$

b) $\log_2 \left(\frac{1}{16} \right) = \log_2 2^{-4} = \dots = -4$

c) $\log_{\sqrt{3}} 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 \sqrt{3}} = \frac{\log_3 3^2}{\frac{1}{2} \log_3 3} = \frac{2 \log_3 3}{\frac{1}{2} \log_3 3} = 4$

d) $\log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[4]{27} = \frac{\log_3 \sqrt[4]{27}}{\log_3 \sqrt[3]{3}} = \frac{\log_3 3^{\frac{3}{4}}}{\frac{1}{3} \log_3 3} = \frac{3}{4} : \frac{1}{3} = \frac{9}{4}$

e) $\log_{0,25} 0,125 = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{8} = \frac{\log_2 \left(\frac{1}{2^3} \right)}{\log_2 \left(\frac{1}{2^2} \right)} = \frac{3 \log_2 \frac{1}{2}}{2 \log_2 \frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$

f) $\log_x \sqrt[4]{x^3} = \log_x x^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$, con $x > 0$ e $x \neq 1$

g) $\log_{0,2} 0,0016 = \log_{\frac{1}{5}} \frac{16}{10^4} = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{2}{10} \right)^4 = 4 \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5} = 4$

h) $\log_{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{8}}{\sqrt[6]{2}} = \log_{\sqrt{2}} \left(2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} : 2^{\frac{1}{6}} \right) = \log_{\sqrt{2}} 2^{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6}} = \frac{13}{12} \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 \sqrt{2}} = \dots = \frac{13}{12} \cdot 2 = \frac{13}{6}$

E2) Nelle espressioni che seguono determinare il valore dell'incognita x .

a) $\log_2 x = -1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

b) $\log_3 (x-1) = 2 \rightarrow x-1=9 \rightarrow x=10$

c) $\log_x 4 = -2$ tenendo presente che l'equazione ha senso se l'incognita x verifica le condizioni $x > 0$, $x \neq 1$, dalla definizione di logaritmo si ha

$$\log_x 4 = -2 \rightarrow x^{-2} = 4 \rightarrow \frac{1}{x^2} = 4 \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

d) $\log_{\sqrt[5]{3}} x = -2 \rightarrow x = \left(\sqrt[5]{3} \right)^{-2} = \left(\sqrt[5]{\frac{2}{3}} \right)^2 = \frac{2}{3}$

e) $\log_{\frac{1}{x}} \sqrt{3} = -\frac{1}{2} \rightarrow \sqrt{3} = \left(\frac{1}{x} \right)^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{x} \rightarrow x = 3$

f) $\log_x \frac{1}{\sqrt[10]{5}} = -0,1 \rightarrow x^{-0,1} = \frac{1}{\sqrt[10]{5}} \rightarrow x^{-\frac{1}{10}} = (5)^{-\frac{1}{10}} \rightarrow x = 5$

g) $\log_x 3 = \log_9 x \rightarrow \frac{\log_3 3}{\log_3 x} = \frac{\log_3 x}{\log_3 9} \rightarrow (\log_3 x)^2 = 2 \rightarrow (\log_3 x = \sqrt{2}) \vee (\log_3 x = -\sqrt{2}) \rightarrow$
 $(x = 3^{-\sqrt{2}}) \vee (x = 3^{\sqrt{2}})$

h) $\log_{|x|}(x+2) = 2$ Osserviamo che l'equazione ha senso per $x > -2$ e $x \neq \pm 1$. Ciò premesso

l'equazione si trasforma come segue:

$x+2 = x^2 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$ Risolvendo l'equazione si trovano i due valori: $x_1 = -1, x_2 = 2$.

Evidentemente è accettabile solo $x=2$.