

Matrici

Studio del rango

(1)

Es_6) Determinare il rango delle seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} h & 1 & 0 \\ 2h & -1 & 0 \\ -3 & 0 & h+1 \end{bmatrix}, \text{ con } h \in \mathbb{R}$$
$$C = \begin{bmatrix} h & h-k & 0 \\ -1 & h+k & 1 \end{bmatrix}, \text{ con } h \text{ e } k \text{ parametri reali.}$$

Soluzione

- 1) Osserviamo che la matrice A ha la quarta colonna composta da elementi nulli; questa colonna ai fini del rango della matrice è ininfluente.
Per determinare il rango della matrice utilizziamo il teorema di Kronecker ed osserviamo che il minore del terzo ordine ottenuto relativo alla matrice estratta ottenuta intersecando le prime tre righe e le prime tre colonne è diverso da zero.

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1, \text{ quindi il rango}(A) \geq 3.$$

Orlando questo minore con la quarta riga e la quinta colonna si ottiene un minore che vale zero:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Non potendo orlare diversamente il minore M_1 per ottenere altri minori del quarto ordine si conclude che il rango della matrice è 3.

- 2) La matrice B
- con $h \neq 0$ e $h \neq -1$ ha rango 3;
 - con $h=0$ oppure $h=-1$ ha rango 2
- 3) La matrice C
- $h \neq 0$ e $\forall k \in \mathbb{R}$ ha rango 2
 - con $h=0$ e $k \neq 0$ ha rango 2
 - con $h=0$ e $k=0$ ha rango 1.

¹ Esercizio assegnato nel compito in classe il 17-10-2009 in 4E