

Determinanti

Disuguazioni ed equazioni con i determinanti

(1)

Es_5) Tenendo conto del significato di determinante, risolvere le seguenti equazioni o disuguazioni proposte.

$$a) \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{x-1}} & x-1 & -1 \\ x & x^2-1 & x \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \geq 0 \quad b) \begin{vmatrix} \sqrt{x} & 2\sqrt{x} & 3\sqrt{x} \\ x-1 & x^2-1 & 2x-2 \\ 2-x & x-2 & 0 \end{vmatrix} \geq 0$$

$$c) \begin{vmatrix} 2\cos x & \sin x & -1 \\ \cos(\pi-x) & \sin(\pi+x) & -1 \\ 0 & \sin \pi & \cos \pi \end{vmatrix} = 0$$

Soluzione

- a) Osserviamo che il dominio di definizione del determinante è l'intervallo $]1; +\infty[$, determinato dal rispetto della condizione $x-1 > 0$ necessaria per l'esistenza dell'elemento a_{11} . Ai fini del calcolo del determinante si può procedere applicando la regola di Laplace sulla terza riga; si ottiene

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ x^2-1 & x \end{vmatrix} \geq 0 \rightarrow (x-1)(2x+1) \geq 0.$$

La disuguazione ottenuta è soddisfatta nell'insieme $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty[$, che

intersecato con il dominio di definizione fornisce come risultato

$$S = \left(\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty[\right) \cap]1; +\infty[=]1; +\infty[.$$

- b) Ricordiamo che se in un determinante D si moltiplicano gli elementi di una linea per un fattore k il valore del determinante ottenuto è uguale al valore del precedente determinante moltiplicato per il suddetto fattore k. Ciò premesso si ha:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{x} & 2\sqrt{x} & 3\sqrt{x} \\ x-1 & x^2-1 & 2x-2 \\ 2-x & x-2 & 0 \end{vmatrix} \geq 0 \rightarrow \sqrt{x} \cdot (x-1)(x-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & x+1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \geq 0 \rightarrow$$

$$3x\sqrt{x} \cdot (x-1)(x-2) \geq 0.$$

L'insieme delle soluzioni della disuguazione ottenuta è: $S = [0; 1] \cup [2; +\infty[$

$$c) \begin{vmatrix} 2\cos x & \sin x & -1 \\ \cos(\pi-x) & \sin(\pi+x) & -1 \\ 0 & \sin \pi & \cos \pi \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2\cos x & \sin x & -1 \\ -\cos x & -\sin x & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\sin x \cdot \cos x = 0 \rightarrow S = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

¹ Esercizio assegnato nel compito in classe il 17-10-2009 in 4E