

Matrici e determinanti

Prodotto di matrici, proprietà dei determinanti

Esercizi⁽¹⁾

Es_3) Siano assegnate le matrici $A(2;3)$, $B(3;4)$, $C(4;2)$ sul campo $\mathbf{R}$. Qualora sia possibile eseguire le operazioni di seguito indicate precisare il tipo di matrice che si ottiene.

- 1) $A \cdot B \cdot C$, 2) $C \cdot A \cdot B$, 3) $B \cdot C \cdot A$, 4) $A \cdot C \cdot B$

Soluzione

Le risposte sono relative al prodotto tra matrici righe x colonne.

- 1) Il prodotto $A \cdot B \cdot C$ è eseguibile ed il risultato è una matrice 2×2 . Tenuto conto della proprietà associativa del prodotto possiamo scrivere
 $(A(2;3) \cdot B(3;4)) \cdot C(4;2) = D(2;4) \cdot C(4;2) = E(2;2)$
- 2) Il prodotto $C \cdot A \cdot B$ è eseguibile ed il risultato è una matrice 4×4 .
 $(C(4;2) \cdot A(2;3)) \cdot B(3;4) = F(4;3) \cdot B(3;4) = G(4;4)$
- 3) Il prodotto $B \cdot C \cdot A$ è eseguibile ed il risultato è una matrice
 $(B(3;4) \cdot C(4;2)) \cdot A(2;3) = H(3;2) \cdot A(2;3) = L(3;3)$
- 4) Il prodotto $A \cdot C \cdot B$ non è eseguibile perché non lo è $A(2;3) \cdot C(4;2)$ in quanto la prima matrice ha un numero di colonne diverso dal numero di righe della seconda. Si osserva che anche il $C(4;2) \cdot B(3;4)$ non è eseguibile.

Es_4) Sfruttando opportunamente le proprietà dei determinanti calcolare il valore del determinante indicato a lato descrivendo l'algoritmo risolutivo applicato.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}$$

Soluzione

Proviamo che il determinante vale zero. A tale scopo sottraiamo la prima colonna alle colonne seconda, terza e quarta ed osserviamo che si ottiene un determinante avente le colonne 2°, 3° e 4° che sono proporzionali; per una nota proprietà dei determinanti il determinante vale zero.

Con le operazioni seguenti 1) $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, 2) $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ 3) $C_4 \leftarrow C_4 - C_1$

il determinante ottenuto è:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 & -6 \\ 3 & -1 & -2 & -3 \\ 5 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} \text{ in cui } C_3 = 2C_2, C_4 = 3C_2.$$

¹ Esercizi assegnati nel compito in classe il 17-10-2009 in 4E