Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche

[(1)]**Es2**- Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche

a) $4^x \cdot \sqrt[x]{\frac{1}{2}\sqrt{2^{x-1}}} = 64$, b) $\log_2\left(x^2-4x\right)+\log_{\frac{1}{2}}(3x-16)=2$, c) $\log_x\left(x-\frac{2}{x}\right)=-1$

d) $\frac{3^x-1}{3^x+2}-\frac{56\cdot 3^x}{9\left(3^{2x}-4\right)}\le 0$, e) $\log_5\left(x^2-4\right)>\log_{\frac{1}{5}}(2-x)$

Soluzione

a) $4^x \cdot \sqrt[x]{\frac{1}{2}\sqrt{2^{x-1}}} = 64 \to 4^x \cdot \left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{1}{x}} = 64 \to 2^{2x+\frac{x-3}{2x}} = 2^6 \to 2x+\frac{x-3}{2x}=6 \to 4x^2-11x-3=0$

Risolta l'equazione di secondo grado si ottengono le radici $x_1=-\frac{1}{4}, x_2=3$.

b) $\log_2\left(x^2-4x\right)+\log_{\frac{1}{2}}(3x-16)=2 \to \log_2\left(x^2-4x\right)+\frac{\log_2(3x-16)}{\log_2\frac{1}{2}}=2 \to \log_2\left(\frac{x^2-4x}{3x-16}\right)=2$,

sotto le condizioni di equivalenza $\begin{cases} x^2-4x>0 \\ 3x-16>0 \end{cases}$, dalle quali emerge la limitazione x>16/3.

L'equazione logaritmica si trasforma nella seguente $\frac{x^2-4x}{3x-16}=4$, che ammette come unica soluzione x=8, che è accettabile.

c) $\log_x\left(x-\frac{2}{x}\right)=-1 \to \begin{cases} x-\frac{2}{x}=x^{-1} \\ x-\frac{2}{x}>0 \\ \left(x^{-1}>0\right)\wedge\left(x^{-1}\ne 1\right) \end{cases} \to \begin{cases} x=\frac{3}{x} \\ x-\frac{2}{x}>0 \\ \left(x^{-1}>0\right)\wedge\left(x^{-1}\ne 1\right) \end{cases} \to x=\sqrt{3}$

d) $\frac{3^x-1}{3^x+2}-\frac{56\cdot 3^x}{9\left(3^{2x}-4\right)}\le 0 \to \frac{3^x-1}{3^x+2}-\frac{56\cdot 3^x}{9\left(3^x-2\right)\left(3^x+2\right)}\le 0 \to \frac{1}{3^x+2}\left[3^x-1-\frac{56\cdot 3^x}{9\left(3^x-2\right)}\right]\le 0 \to$

$\frac{9\left(3^x-2\right)\left(3^x-1\right)-56\cdot 3^x}{9\left(3^x-2\right)}\le 0 \to \frac{9\left(3^x\right)^2-83\cdot 3^x+18}{9\left(3^x-2\right)}\le 0$;

Si studiano i segni del numeratore e del denominatore.

$9\left(3^x\right)^2-83\cdot 3^x+18\ge 0$, è soddisfatta per $x\ge 2$;

3^x-2>0, è soddisfatta per $x>\log_3 2$.

Confrontando i segni del numeratore e del denominatore si conclude che la disequazione in esame ha come insieme delle soluzioni $S=\left]\log_3 2;2\right]$.

[(1)] Esercizi assegnati nel compito in classe M5_4D_17-04-12 (classe quarta di Liceo Scientifico, Ind. PNI)

e) $\log_5\left(x^2-4\right)>-\log_{\frac{1}{5}}\left(2-x\right)$

Si riconosce che la disequazione ha senso per x<-2. Per risolvere la disequazione si devono ricondurre i due logaritmi alla stessa base. Scegliamo come base comune il 5.

$$\log_5\left(x^2-4\right)>-\log_{\frac{1}{5}}\left(2-x\right)\to \log_5\left(x^2-4\right)>-\frac{\log_5\left(2-x\right)}{\log_5\frac{1}{5}}\to \log_5\left(x^2-4\right)>\log_5\left(2-x\right)\to$$

$$\begin{cases} x^2-4>2-x \\ 2-x>0 \end{cases}\to \begin{cases} -\left(x+2\right)\left(2-x\right)>\left(2-x\right) \\ 2-x>0 \end{cases}\to \begin{cases} -\left(x+2\right)>1 \\ x<2 \end{cases}\to \begin{cases} x<-3 \\ x<2 \end{cases}\to x<-3$$

L'insieme delle soluzioni della disequazione è l'intervallo $\left]-\infty;-3\right[$.