

Curve esponenziali a confronto

⁽¹⁾Esercizio

Q1- Rappresentare nello stesso riferimento cartesiano xOy le curve aventi equazioni

$$\lambda_1 : y = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}, \lambda_2 : y = \left(\frac{3}{2}\right)^x, \lambda_3 : y = \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}$$

dopo aver determinato per ciascuna almeno cinque punti.

Q2-Dimostrare che esiste una trasformazione τ del piano cartesiano in se stesso tale che si abbia

$$\tau(\lambda_1) = \lambda_2 \text{ e } \tau(\lambda_2) = \lambda_3; \text{ scrivere le equazioni della trasformazione } \tau.$$

Q3- Per ogni $k > 0$, siano P_1, P_2, P_3 rispettivamente i punti in cui la retta $s: y=k$ interseca le curve esponenziali $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Dimostrare che i segmenti P_1P_2, P_2P_3 hanno la stessa misura.

Q4- Stabilire quanti sono i numeri naturali n che soddisfano la doppia disuguaglianza

$$10^3 < \left(\frac{3}{2}\right)^n < 10^4.$$

Soluzione

Q1- Le tre curve esponenziali sono rappresentate nella figura seguente.

Q2- Considerata la traslazione $\tau : \pi \rightarrow \pi$ determinata dal vettore $\vec{V}(1;0)$, le cui equazioni cartesiane

sono $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y \end{cases}$, si riconosce agevolmente

che risulta $\tau(\lambda_1) = \lambda_2$ e $\tau(\lambda_2) = \lambda_3$.

Q3- Con $k > 0$, si ha

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = k \rightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} k - 1 \text{ e dunque}$$

$$P_1\left(\log_{\frac{3}{2}} k - 1; k\right);$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = k \rightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} k \rightarrow P_2\left(\log_{\frac{3}{2}} k; k\right);$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} = k \rightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} k + 1 \rightarrow$$

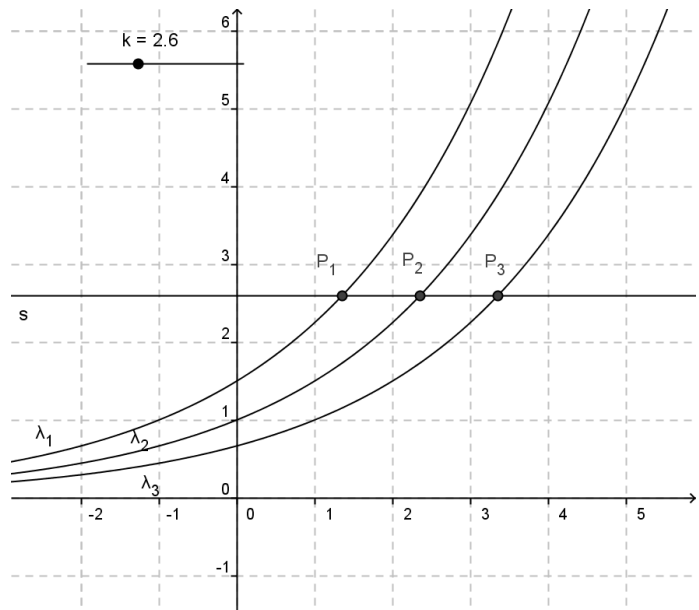
$$P_3\left(\log_{\frac{3}{2}} k + 1; k\right).$$

A questo punto, notiamo che le misure dei segmenti in oggetto sono

$$\overline{P_1P_2} = x_{P_2} - x_{P_1} = \log_{\frac{3}{2}} k - \left(\log_{\frac{3}{2}} k - 1\right) = 1; \quad \overline{P_2P_3} = x_{P_3} - x_{P_2} = \log_{\frac{3}{2}} k + 1 - \log_{\frac{3}{2}} k = 1,$$

quindi i due segmenti hanno la stessa misura.

Q4- Osserviamo che la doppia disuguaglianza



⁽¹⁾ Esercizio assegnato nel compito in classe M5_4D_17-04-12 (classe quarta di Liceo Scientifico, Ind. PNI)

$10^3 < \left(\frac{3}{2}\right)^n < 10^4$ è equivalente alla seguente $\log_{\frac{3}{2}}(10^3) < n < \log_{\frac{3}{2}}(10^4)$, che si trasforma ulteriormente come segue $3\log_{\frac{3}{2}}10 < n < 4\log_{\frac{3}{2}}10$.

A questo punto notiamo che $\log_{\frac{3}{2}}10 \simeq 5,67887$, inoltre, l'intervallo $\left]3\log_{\frac{3}{2}}10; 4\log_{\frac{3}{2}}10\right[$ ha gli estremi che sono numeri irrazionali e la sua ampiezza è $\delta = \log_{\frac{3}{2}}10$, per cui può contenere solo cinque numeri naturali. Nel caso specifico intervallo è $]17,036...; 22,715...[$ e i numeri naturali contenuti sono 18, 19, 20, 21, 22.