

## Equazioni di terzo e quarto grado

- L'equazione di terzo grado della forma**

$$x^3 + px + q = 0 \quad (1)$$

si risolve applicando la formula seguente

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} . \quad (2)$$

Se l'equazione si presenta nella forma completa

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \quad (3)$$

tramite la sostituzione di variabile

$$x = z - \frac{a_1}{3a_0}, \quad (4)$$

dopo aver sviluppato i calcoli delle potenze dei binomi nella forma

$$a_0 \left( z - \frac{a_1}{3a_0} \right)^3 + a_1 \left( z - \frac{a_1}{3a_0} \right)^2 + a_2 \left( z - \frac{a_1}{3a_0} \right) + a_3 = 0 ,$$

si perviene alla forma semplificata del tipo (1)

$$z^3 + pz + q = 0 \quad (5)$$

alla quale si può applicare la formula indicata sopra.

Nella (5) risulta

$$p = \frac{3a_0a_2 - a_1^2}{3a_0^2}, \quad q = \frac{2a_1^3 - 9a_0a_1a_2 + 27a_0^2a_3}{27a_0^3} \quad (6)$$

- Equazione di quarto grado**

Considerata l'equazione di quarto grado completa

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \quad (7)$$

con la sostituzione di variabile

$$x = z - \frac{a_1}{4a_0}, \quad (8)$$

dopo le semplificazioni algebriche, si perviene alla seguente forma

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0 \quad (9)$$

Per determinare le radici della (9) si pone

$$z = u + v + w \quad (10)$$

ed i valori  $u, v, w$  si ricavano dalle radici  $t_1, t_2, t_3$  della seguente equazione di terzo grado

$$t^3 + \frac{p}{2}t^2 + \frac{p^2 - 4r}{16}t - \frac{q^2}{64} = 0 \quad (11)$$

risultando

$$u^2 = t_1, \quad v^2 = t_2, \quad w^2 = t_3. \quad (12)$$

In definitiva, le radici dell'equazione (7) saranno della forma

$$x = z - \frac{a_1}{4a_0} = \pm\sqrt{t_1} \pm \sqrt{t_2} \pm \sqrt{t_3} - \frac{a_1}{4a_0} \quad (13)$$

Combinando opportunamente i segni con cui prendere i radicali.