Equazioni logaritmiche

1) $\log 5-\log\left(4-\sqrt{x}\right)=\log\left(4+\sqrt{x}\right)$

Soluzione

Osserviamo che l'equazione ha senso per i valori della variabile che verificano il seguente sistema

$\begin{cases} x\geq 0 \\ 4-\sqrt{x}>0 \end{cases}$, che risolto fornisce la limitazione $0\leq x<16$.

Per i valori indicati per l'incognita l'equazione si può trasformare come segue:

$$\log\frac{5}{4-\sqrt{x}}=\log\left(4+\sqrt{x}\right)$$

dalla quale, per l'iniettività della funzione logaritmo, si passa all'uguaglianza tra gli argomenti.

$$\frac{5}{4-\sqrt{x}}=4+\sqrt{x}\rightarrow 5=\left(4-\sqrt{x}\right)\left(4+\sqrt{x}\right)\rightarrow 5=16-x\rightarrow x=11.$$

Il valore ottenuto *x*=11 appartiene al dominio di definizione dell'equazione [0;16[, dunque si accetta come soluzione: $S=\{11\}$.

* * * * * * *

2) $\frac{1}{2}\log(8-x)=\log 3+\frac{1}{2}\log x$

Soluzione

Dominio di definizione dell'equazione.

Per l'esistenza dell'equazione l'incognita *x* deve verificare il seguente sistema di disuguaglianze:

$\begin{cases} 8-x>0 \\ x>0 \end{cases}$ dal quale si ricava il dominio A=]0;8[.

Con *x* elemento di A si trasforma l'equazione come segue:

$$\frac{1}{2}\log(8-x)=\log 3+\frac{1}{2}\log x\rightarrow \log\sqrt{8-x}=\log\left(3\sqrt{x}\right)\rightarrow\sqrt{8-x}=3\sqrt{x}\rightarrow$$

$$\left(\sqrt{8-x}\right)^2=\left(3\sqrt{x}\right)^2\rightarrow 8-x=9x\rightarrow x=\frac{4}{5}\in\ ]0;8[\ .$$

Concludiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S=\left\{\frac{4}{5}\right\}$.

* * * * * * *

3) $2\log(1-x)-\log\left(x^2-1\right)=0$

Soluzione

Dominio di definizione dell'equazione.

L'equazione ha senso per i valori dell'incognita che soddisfano il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases}1-x>0\\ x^2-1>0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x<1\\ (x<-1)\vee(x>1)\end{cases}\rightarrow x<-1.$$

Dunque il dominio di definizione è l'intervallo]-∞;-1[.

L'equazione si può elaborare come segue:

$$2\log(1-x)-\log\left(x^2-1\right)=0\rightarrow\log(1-x)^2-\log\left(x^2-1\right)=0\rightarrow\log\frac{(1-x)^2}{x^2-1}=0\rightarrow\frac{(1-x)^2}{x^2-1}=1\rightarrow$$

$$\begin{cases}x<-1\\ (1-x)^2=x^2-1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x<-1\\ 1-2x+x^2=x^2-1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x<-1\\ 2x=2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x<-1\\ x=1\end{cases}$$

Il valore ottenuto $x=1$ non appartiene al dominio di definizione dell'equazione e quindi non è accettabile come soluzione. Si conclude che l'equazione non ha alcuna soluzione: $S=\varnothing$.

* * * * * * *

4) $\log_{\frac{1}{2}}x-\log_{\frac{1}{4}}x=\log_4 16$

Soluzione

L'equazione è definita per $x>0$. Per risolverla riduciamo i logaritmi al primo membro alla stessa base. Si ha:

$$\log_{\frac{1}{2}}x-\log_{\frac{1}{4}}x=\log_4 16\rightarrow\log_{\frac{1}{2}}x-\frac{\log_{\frac{1}{2}}x}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}}=\log_4 4^2\rightarrow\log_{\frac{1}{2}}x-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}x=2\rightarrow\log_{\frac{1}{2}}x=4\rightarrow$$

$x=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$. Il valore ottenuto è accettabile come soluzione. L'insieme delle soluzioni è:

$S=\left\{\frac{1}{16}\right\}$

* * * * * * *

5) $\log_4 x^2 - \log_8 \sqrt{x} = \frac{5}{3}$

Soluzione

L'equazione è definita per $x>0$. Possiamo trasformarla come segue:

$$\frac{\log_2 x^2}{\log_2 4} - \frac{\log_2 \sqrt{x}}{\log_2 8} = \frac{5}{3} \to \frac{2\log_2 x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\log_2 x}{3} = \frac{5}{3} \to \left(1-\frac{1}{6}\right)\log_2 x = \frac{5}{3} \to \frac{5}{6}\log_2 x = \frac{5}{3} \to$$
$$\log_2 x = 2 \to x = 4$$

L'insieme delle soluzioni è: $S = \{4\}$.

* * * * * * *

6) $3\left(\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x\right) = 4 - \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$

Soluzione

L'equazione è definita per $x>0$. La elaboriamo come segue:

$$3\left(\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x\right) = 4 - \log_2\left(\frac{1}{x}\right) \to 3\left(\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}}\right) = 4 - \log_2 1 + \log_2 x \to$$
$$3(\log_2 x - \log_2 x) = 4 + \log_2 x \to 4 + \log_2 x = 0 \to x = 2^{-4}.$$

L'insieme delle soluzioni è: $S = \left\{\frac{1}{16}\right\}$.

* * * * * * *

7) $\frac{\log x + 1}{\log x - 1} + \frac{\log x - 1}{\log x + 1} = \frac{2}{\log^2 x - 1}$

Soluzione

L'equazione è definita per i valori reali positivi dell'incognita che verificano le ulteriori

$\log x - 1 \neq 0$, $\log x + 1 \neq 0$, per cui sono esclusi anche i due valori e, e^{-1}. Riduciamo allo stesso denominatore le frazioni e semplifichiamo l'espressione.

$$\frac{(\log x + 1)^2 + (\log x - 1)^2}{(\log x - 1)(\log x + 1)} = \frac{2}{\log^2 x - 1} \to 2\left(\log^2 x + 1\right) = 2 \to \log^2 x + 1 = 1 \to \log^2 x = 0 \to x = 1$$

Il valore trovato è accettabile come soluzione. L'insieme delle soluzioni è: $S=\{1\}$.