Equazioni esponenziali

1) $\frac{3^{x-2}}{4^{x-3}}=\frac{4^{x^2-x+1}}{3^{x^2-x}}\rightarrow 3^{x-2}\cdot 3^{x^2-x}=4^{x-3}\cdot 4^{x^2-x+1}\rightarrow 3^{x^2-2}=4^{x^2-2}$

Avendo trasformato l'equazione nell'uguaglianza tra due potenze aventi basi diverse e lo stesso esponente, si deduce che l'equazione è verificata solo dai valori dell'incognita che annullano l'esponente; quindi:

$x=\pm\sqrt{2}$. L'insieme delle soluzioni dell'equazione in esame è: $S=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$.

2) $\sqrt{10^{x^2-x}}\cdot 0{,}1=100^{x-2}$

L'equazione è definita per ogni valore reale di *x*.
Trasformiamo l'equazione come segue.

$$10^{\frac{x^2-x}{2}}\cdot 10^{-1}=10^{2(x-2)}\rightarrow 10^{\frac{x^2-x}{2}-1}=10^{2(x-2)}.$$

L'equazione è equivalente a quella ottenuta uguagliando gli esponenti delle potenze dei due membri.

$\frac{x^2-x}{2}-1=2(x-2)\rightarrow x^2-5x+6=0$ e le radici di quest'equazione sono:

$x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}\rightarrow x_1=2; x_2=3$.

Insieme delle soluzioni: $S=\left\{2;3\right\}$.

3) $10^{\frac{2x-1}{x+1}}:10^{\frac{1}{x}}=\sqrt{10}$

Si tratta di un'equazione definita in $R-\left\{-1;0\right\}$.

Elaboriamo l'equazione nella forma:

$10^{\frac{2x-1}{x+1}-\frac{1}{x}}=10^{\frac{1}{2}}$

che è equivalente alla seguente $\frac{2x-1}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$

Riduciamo l'equazione alla forma normale.

$\frac{2x(2x-1)-2(x+1)-x(x+1)}{2x(x+1)}=0\rightarrow\frac{3x^2-5x-2}{2x(x+1)}=0\rightarrow 3x^2-5x-2=0$

L'equazione ottenuta ammette come radici $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=2$, che essendo entrambe diverse da -1 e da 0 sono accettabili.

L'insieme delle soluzioni dell'equazione è perciò: $S=\left\{-\frac{1}{3};2\right\}$.

4) $2^{x+1}-2^{x-1}+2^{x+2}=44$ Elaboriamo l'espressione dell'equazione come segue:

$2^x\cdot 2-2^x\cdot 2^{-1}+2^x\cdot 2^2=44\rightarrow 2^x\left(2-\frac{1}{2}+4\right)=44\rightarrow\frac{11}{2}\cdot 2^x=44\rightarrow 2^x=8\rightarrow x=3$

L'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S=\left\{3\right\}$.

5) $a^{\frac{1}{x+1}}\cdot a^{\frac{1}{x}}=a^{\frac{x+2}{x+1}}$

L'equazione è definita per $a>0$ ed $\left(x\neq 0\right)\wedge\left(x\neq -1\right)$.

Osserviamo subito che per *a*=1 l'equazione è soddisfatta da ogni valore reale del dominio, cioè da ogni *x* diverso da zero e da -1. Per gli altri valori positivi di *a* l'equazione si trasforma nella seguente

$a^{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}} = a^{\frac{x+2}{x+1}} \to \frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}=\frac{x+2}{x+1}$, da cui si perviene all'equazione $x^2=1$ che ammette come soluzioni $x_1=-1$, $x_2=1$. Dei due valori trovati è accettabile solo x=1 perché rispetta le condizioni di esistenza dell'equazione.

L'insieme delle soluzioni è dunque $S=\{1\}$.

6) $3^{2x}+1=10\cdot 3^{x-1}$

L'equazione è definita per ogni x reale. Possiamo trasformarla come segue:

$$\left(3^x\right)^2-\frac{10}{3}\cdot 3^x+1=0 \to 3\left(3^x\right)^2-10\cdot 3^x+3=0$$

Ponendo $3^x=t$ si perviene all'equazione

$3t^2-10t+3=0$ le cui radici sono $t_1=\frac{1}{3}$, $t_2=3$.

Ritornando all'incognita x si ha:

$t_1=\frac{1}{3}\to 3^x=\frac{1}{3}=3^{-1}$, quindi x=-1;

$t_2=3\to 3^x=3$, quindi x=1.

Concludiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione in esame è $S=\{-1;1\}$.

7) $5^{2x-1}-5^{1-x}-4=0$

L'equazione è definita in R. Elaboriamo il primo membro come segue:

$$\frac{1}{5}\left(5^x\right)^2-\frac{5}{5^x}-4=0\to\left(5^x\right)^3-20\cdot 5^x-25=0.$$

Ponendo $5^x=t$ si perviene all'equazione di terzo grado

$t^3-20t-25=0$.

Osserviamo che l'equazione ottenuta ammette la radice t=5, per cui il polinomio $P(t)=t^3-20t-25$ è divisibile per il binomio (t-5). Eseguendo la divisione $(t^3-20t-25):(\mathrm{t}-5)$ si ottiene il quoziente $\mathrm{Q(t)}=\mathrm{t}^2+5t+5$ per cui l'equazione si può scrivere nella forma

$(\mathrm{t}-5)(\mathrm{t}^2+5t+5)=0$ e le sue radici sono $t_1=5$, $t_2=-\frac{5+\sqrt{5}}{2}$, $t_2=\frac{\sqrt{5}-5}{2}$.

Osserviamo che t_2<0 e t_3<0, per cui, ritornando all'incognita x, potremo ricava re una soluzione per l'equazione di partenza solo dall'uguaglianza

$5^x=t_1=5$, soddisfatta da x=1.

Si conclude che l'insieme delle soluzioni è $S=\{1\}$.

8) $2^{x+1}-5\cdot\left(\sqrt{2}\right)^x-12=0$

L'equazione è definita su tutto l'asse reale.

Scrivendo l'equazione nella forma $2\cdot 2^x-5\cdot\left(\sqrt{2}\right)^x-12=0$ ed osservando che

$2^x=\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^x=\left(\left(\sqrt{2}\right)^x\right)^2$, con $\left(\sqrt{2}\right)^x=t$ l'equazione si trasforma come segue

$2t^2-5t-12=0$, le cui radici sono $t_1=-\frac{3}{2}$, $t_2=4$. Ritornando all'incognita x, l'equazione

$\left(\sqrt{2}\right)^x=-\frac{3}{2}$ non fornisce alcuna soluzione reale, mentre dall'equazione

$\left(\sqrt{2}\right)^x = 4$ segue $\quad 2^{\frac{x}{2}} = 2^2 \to \frac{x}{2} = 2 \to x = 4$.

Conclusione: l'insieme delle soluzioni è $S = \{4\}$

9) $3^{x+1} \cdot 5^{2x-1} = \frac{1}{125}$

L'equazione è definita su tutto R. Elaborando le potenze si ha:

$3^x \cdot 3 \cdot 5^{2x} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{125} \to \left(3 \cdot 5^2\right)^x = 75^{-1} \to x = -1$. L'insieme delle soluzioni è $S = \{-1\}$

10) $3^{x+1} \cdot 5^{x-1} = \frac{1}{15}$

L'equazione è definita su tutto R. la elaboriamo come segue:

$3^{x+1} \cdot 5^{x-1} = \frac{1}{15} \to 15^x \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{15} \to 15^x = \frac{1}{9} \to x = log_{15}\left(\frac{1}{9}\right) = -log_{15} 9 \to$

$x = -log_{15} 3^2 = -2\, log_{15} 3 = -2 \cdot \frac{log\, 3}{log\, 15}$.

11) $3^{x+1} + 3^{x-1} = 2^{x+2} + 2^x$

L'equazione è definita su tutto l'asse reale. La risolviamo trasformandola opportunamente.

$3^x\left(3 + \frac{1}{3}\right) = 2^x\left(4+1\right) \to \frac{10}{3} \cdot 3^x = 5 \cdot 2^x \to 3^{x-1} = 2^{x-1} \to x - 1 = 0 \to x = 1$.