

Equazione irrazionale (sul concetto di dominio di un predicato)

Problema

Si risolva nel campo dei numeri reali $\mathbf{R}$ l'equazione

$$x\sqrt{2-3x} = \frac{1}{3}$$

Soluzione

L'equazione è irrazionale intera. L'uguaglianza ha senso se l'argomento del radicale presente è non negativo, dunque

$$2-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$$

Le eventuali soluzioni vanno ricercate nell'intervallo

$$D = \left] -\infty; \frac{2}{3} \right]. \quad (1)$$

L'insieme D rappresenta il dominio di definizione dell'equazione (cioè del predicato che si richiede che sia vero).

Approfondimento

Un'analisi più attenta sulla struttura dell'equazione suggerisce che l'insieme in cui cercare le eventuali soluzioni è un sottoinsieme proprio di D . Infatti, il secondo membro dell'uguaglianza è un numero positivo e quindi tale deve essere anche il primo membro e poiché questo è il prodotto di due fattori questi ultimi devono essere non nulli e concordi. Possiamo concludere che le eventuali soluzioni dell'equazione in esame devono verificare il seguente sistema di condizioni

$$\begin{cases} \sqrt{2-3x} > 0 \\ x > 0 \end{cases}, \text{ il cui insieme di soluzioni è } D' = \left] 0; \frac{2}{3} \right[. \quad (2)$$

Risolviamo ora l'equazione.

Con $x \in D'$ la disequazione si trasforma in una equivalente elevando al quadrato ambo i membri. Si ottiene l'equazione

$$27x^3 - 18x^2 + 1 = 0 \quad (3)$$

che è di terzo grado e non rientra in alcun modello particolare. Per la sua risoluzione, a livello elementare, ci si aiuta con il Teorema del resto e, in caso di successo, con la Regola di Ruffini per la scomposizione in fattori del polinomio al primo membro

$$P(x) = 27x^3 - 18x^2 + 1.$$

Operatività del metodo

Dal punto di vista operativo, (tenendo presente il Teorema del resto) si deve ricercare un numero $x = \alpha$ che annulli il polinomio (zero del polinomio) e successivamente eseguire la divisione

$$P(x) : (x - \alpha) \quad (4)$$

che sarà esatta ed il quoziente $Q(x)$ trovato permetterà di scrivere $P(x)$ nella forma fattorizzata

$$P(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x) \quad (5)$$

La ricerca va effettuata in primo luogo nell'insieme dei divisori del termine noto del polinomio ed in caso di insuccesso estendere la ricerca nell'insieme F delle frazioni che si possono comporre ponendo al numeratore un divisore del termine noto ed al denominatore un divisore del coefficiente del termine di grado massimo dello stesso polinomio. I due insiemi numerici in questione sono

$$D_1 = \{-1; 1\} \quad \text{insieme dei divisori del termine noto;}$$

$$F = \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \frac{1}{9}; -\frac{1}{27}; \frac{1}{27} \right\} \quad \text{insieme delle frazioni.}$$

Eseguendo i calcoli si verifica che $P\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ ed eseguendo la divisione

$$P(x) : \left(x - \frac{1}{3}\right)$$

e si ottiene il quoziente $Q(x) = 27x^2 - 9x - 3$.

L'equazione di partenza può essere posta nella forma equivalente

$$\left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot (27x^2 - 9x - 3) = 0, \text{ ovvero nella forma più semplice}$$

$$(3x - 1) \cdot (9x^2 - 3x - 1) = 0$$

Uguagliando a zero il primo fattore si trova la prima radice:

$$3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

e poiché $\frac{1}{3} \in D'$ essa è anche soluzione dell'equazione irrazionale di partenza;

uguagliando a zero il secondo fattore e risolvendo la conseguente equazione di secondo grado si ha

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 36}}{18} = \frac{3(1 \pm \sqrt{5})}{18} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{6}$$

Controllo sull'accettabilità dei valori come soluzioni dell'equazione irrazionale

$$x = \frac{1 - \sqrt{5}}{6} < 0 \Rightarrow \frac{1 - \sqrt{5}}{6} \notin \left]0; \frac{2}{3}\right], \text{ quindi questo valore non è soluzione dell'equazione;}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{6} > 0; \text{ occorre verificare se è soddisfatta la seconda limitazione}$$

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{6} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{5} < 4 \Leftrightarrow \sqrt{5} < 3 \Leftrightarrow 5 < 9 \text{ (la disuguaglianza è verificata)}$$

Conclusione

L'insieme delle soluzioni dell'equazione irrazionale in esame è

$$S = \left\{ \frac{1}{3}; \frac{1 + \sqrt{5}}{6} \right\}$$

La riflessione preventiva aiuta

Vogliamo far notare che l'equazione irrazionale assegnata si può scrivere nella seguente forma

$$3x\sqrt{2 - 3x} = 1$$

e l'occhio attento dello studente dovrebbe essere attratto dalla presenza del monomio $3x$. Con il semplice cambio di variabile, ponendo t in luogo di $3x$, si perviene all'equazione

$$t\sqrt{2 - t} = 1$$

che ridotta alla forma normale diventa

$$t^3 - 2t^2 + 1 = 0, \text{ le cui soluzioni devono appartenere all'intervallo }]0; 2[.$$

Si riconosce immediatamente che $t_1 = 1$ è una soluzione accettabile e da questo valore si risale a quello della prima radice dell'equazione di riferimento:

$$t_1 = 1 = 3x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}.$$

A questo punto si esegue la divisione $(t^3 - 2t^2 + 1) : (t - 1)$ ottenendo come quoziente

$$Q(t) = t^2 - t - 1. \text{ L'equazione si può scrivere nella forma}$$

$$(t-1) \cdot (t^2 - t - 1) = 0$$

e dall'equazione di secondo grado

$$t^2 - t - 1 = 0 \text{ si ricavano le due radici}$$

$$t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0, \quad t_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in]0; 2[; \text{ dei due valori è accettabile solo il secondo in}$$

corrispondenza al quale, in virtù della sostituzione di variabile effettuata, si ricava il valore

$$x = \frac{t_3}{3} = \frac{1+\sqrt{5}}{6} \text{ per l'equazione di riferimento.}$$

La grafica chiarisce i concetti

Riporto di seguito un'elaborazione grafica ottenuta con Derive V.6 in cui si evidenziano i due punti A e B comuni alle due curve γ_1, γ_2 , di equazioni

$$\gamma_1: y = \frac{1}{3x}, \quad \gamma_2: y = \sqrt{2-3x}$$

Le ascisse di detti punti rappresentano i valori delle radici dell'equazione irrazionale risolta. In

particolare risulta $x_A = \frac{1}{3}, x_B = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Esercizi proposti

Risolvere le seguenti equazioni irrazionali:

a) $x\sqrt{1-x} = -6$
 $S = \{-3\};$

b) $\sqrt{3+4x} - 2 = 2x$
 l'equazione ammette una soluzione doppia
 $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\};$

c) $\frac{3}{\sqrt{x+4}} = 6-x$
 $S = \left\{\frac{3(1-\sqrt{13})}{2}; 5\right\}$

