Equazioni esponenziali e logaritmiche

Equazioni esponenziali

1) $2^x \sqrt[x]{2\sqrt{2^{-x}}} = 4^{1-x}\sqrt[3]{8^{2x}}$

Soluzione

Osserviamo che l'equazione ha senso per ogni $x\neq 0$. Tenendo presente l'uguaglianza $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, valida per ogni a>0, ogni m reale ed n≠0, possiamo trasformare l'equazione come segue

$$2^x \sqrt[x]{2\sqrt{2^{-x}}} = 4^{1-x}\sqrt[3]{8^{2x}} \to 2^x\left(2\cdot 2^{-\frac{x}{2}}\right)^{\frac{1}{x}} = 2^{2(1-x)}\cdot 8^{\frac{2}{3}x} \to 2^x\left(2^{\frac{1}{x}}\cdot 2^{-\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x}}\right) = 2^{2(1-x)}\cdot\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}x} \to$$

$$2^x\cdot 2^{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}} = 2^{2(1-x)}\cdot 2^{2x} \to 2^{x+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}} = 2^{2-2x+2x} \to 2^{x+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}} = 2^2.$$

A questo punto, ricordato che la funzione esponenziale è iniettiva, l'uguaglianza ottenuta sussiste se e solo se sono uguali gli esponenti. Quindi si passa all'equazione

$$x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = 2 \to 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

che risolta fornisce le soluzioni $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$. I valori ottenuti sono accettabili come soluzioni dell'equazione di partenza, per cui l'insieme delle soluzioni cercato è: $S = \left\{\frac{1}{2};2\right\}$.

* * * * * * *

2) $\dfrac{2\cdot 3^{-x}+1}{10+3^{-x}} = \dfrac{3^{-x}+5}{3^{-1-x}+1}$

Soluzione

L'equazione ha senso per ogni *x* reale.

Per elaborare più comodamente l'equazione effettuiamo la sostituzione $3^{-x} = t$. Procediamo.

$\dfrac{2\cdot 3^{-x}+1}{10+3^{-x}} = \dfrac{3^{-x}+5}{3^{-1-x}+1} \to \dfrac{2t+1}{10+t} = \dfrac{t+5}{3^{-1}t+1} \to (2t+1)\left(3^{-1}t+1\right) = (t+5)(10+t) \to$ (dopo le operazioni di semplificazione) $t^2 + 8t - 153 = 0$.

Quest'equazione di secondo grado ammette come radici: $t_1 = -17$, $t_2 = 9$.

Tornando all'incognita *x*, si ha:

$t_1 = -17 \rightarrow 3^{-x} = -17$, che non ha soluzioni, in quanto $3^{-x} > 0$;

$t_2 = 9 \rightarrow \; 3^{-x} = 9 = 3^2 \; \rightarrow \; x = -2$.

Si conclude che l'insieme delle soluzioni dell'equazione di partenza è: $S = \{2\}$.

* * * * * * *

3) $243\left(\frac{3}{2}\right)^{4x-1} - 108\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 16 = 0$

Soluzione

L'equazione ha senso per ogni *x* reale. Elaboriamo la forma dell'equazione.

$$243\left(\frac{3}{2}\right)^{4x} \cdot \frac{2}{3} - 108\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 16 = 0 \rightarrow 81\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}\right)^2 - 54\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 8 = 0.$$

Si può snellire la forma ponendo $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = t$. Si ha:

$$81\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}\right)^2 - 54\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 8 = 0 \rightarrow \; 81t^2 - 54t + 8 = 0$$

Le cui radici sono $t_1 = \frac{2}{9}$, $t_2 = \frac{4}{9}$. Tornando alla variabile x si ha:

$$t_1 = \frac{2}{9} \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \frac{2}{9} \rightarrow x = \frac{\log 2 - 3\log 3}{2(\log 3 - \log 2)};$$

$$t_2 = \frac{4}{9} \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \frac{4}{9} \rightarrow \; x = -1.$$

Concludiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione in esame è:

$$S = \left\{\frac{\log 2 - 3\log 3}{2(\log 3 - \log 2)}; -1\right\}.$$

Equazioni logaritmiche

1) $\frac{1}{2}\log_3\left(10 - \frac{3}{3^{2x-3}}\right) = x - 1$

Soluzione

L'equazione assegnata è equivalente alla seguente

$$10-\frac{3}{3^{2x-3}}=3^{2(x-1)}$$

Che possiamo elaborare ulteriormente.

$10-3^{1-2x+3}=3^{2(x-1)} \to \ 3^{2x}\cdot 3^{-2}+3^{-2x}\cdot 3^{4}-10=0$ Con la sostituzione $3^{2x}=t$ si ha

$\frac{1}{9}t+\frac{81}{t}-10=0 \to t^2-90t+729=0 \to t_2^1=45\pm 36 \to t_1=9, t_2=81$.

$t_1=9 \to 3^{2x}=9=3^2 \to x_1=1$; $t_2=81 \to 3^{2x}=81=3^4 \to x=2$.

Concludiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S=\{1;2\}$.

* * * * * * *

2) $\log^2_{\frac{1}{3}} x+\log_{\frac{1}{3}}(9x)-4=0$

Soluzione

Tenendo presente la proprietà del prodotto per la funzione logaritmica si ha

$\log^2_{\frac{1}{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} 9+\log_{\frac{1}{3}} x-4=0$ e poiché $\log_{\frac{1}{3}} 9=-2$ l'equazione diventa

$\log^2_{\frac{1}{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} x-6=0$. Poniamo brevemente $\log_{\frac{1}{3}} x=t$.

$t^2+t-6=0 \to t_2^1=-1\pm 5 \to$

$t_1=-6 \to \ \log_{\frac{1}{3}} x=-6 \to x=3^6; t_2=4 \to \log_{\frac{1}{3}} x=4 \to x=3^{-4}$.

L'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S=\{3^{-4};3^6\}$.

* * * * * * *

3) $\log_4\left(3\sqrt{x}+2\right)-\log_2\sqrt{6-\sqrt{x}}=0$

Soluzione

Tenendo presenti le proprietà della radice e del cambiamento di base si ha

$$\log_4\left(3\sqrt{x}+2\right)-\log_2\sqrt{6-\sqrt{x}}=0\to\frac{\log_2\left(3\sqrt{x}+2\right)}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2\left(6-\sqrt{x}\right)\to$$

$$\log_2\left(3\sqrt{x}+2\right)=\log_2\left(6-\sqrt{x}\right)\to 3\sqrt{x}+2=6-\sqrt{x}\to 4\sqrt{x}=4\to x=1.$$

Si conclude che l'insieme delle soluzioni è $S=\{1\}$.